Übungen zur Mengentheoretischen Topologie

Sommersemester 2014

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dominik Wrazidlo

Blatt 13
Abgabetermin: Mittwoch, 16.07.2014, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. (Das Nagelproblem, Teil II) *(6 Punkte)*
Seien X und $\widetilde{X}$ topologische Räume und $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Eine *Decktransformation* bezüglich p ist ein Homöomorphismus $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ mit $p \circ h = p$ (vgl. Blatt 12, Aufgabe 2(iv) und Aufgabe 4(c)). Es bezeichne $\mathrm{Deck}(p)$ die Menge aller Decktransformationen bezüglich p. Man zeige:

(a) $\mathrm{Deck}(p)$ ist eine Gruppe, deren Verknüpfung durch Verkettung von Decktransformationen gegeben ist.

(b) Ist $\widetilde{X}$ ein zusammenhängender Hausdorffraum und $h \in \mathrm{Deck}(p)$ mit $h(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$ für ein $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, so gilt bereits $h = \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$.
Hinweis: Man zeige, dass $\{\widetilde{x} \in \widetilde{X};\ h(\widetilde{x}) = \widetilde{x}\} \neq \emptyset$ sowohl offen als auch abgeschlossen in $\widetilde{X}$ ist. Für die Offenheit verwende man die Überlagerungseigenschaft von p sowie $p \circ h = p$.

Aufgabe 2. (Das Nagelproblem, Teil III) *(6 Punkte)*
Seien X und $\widetilde{X}$ topologische Räume mit Basispunkten $x_0 \in X$ und $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$, sowie $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung mit $p(\widetilde{x}_0) = x_0$. Man zeige:

(a) Ist $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend und gilt $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = \{1\}$, dann definiert die Zuordnung

$$\Phi : \mathrm{Deck}(p) \to \pi_1(X, x_0), \qquad h \mapsto [p \circ \widetilde{w}_h],$$

wobei $\widetilde{w}_h : [0,1] \to \widetilde{X}$ irgendeinen Weg in $\widetilde{X}$ mit $\widetilde{w}_h(0) = \widetilde{x}_0$ und $\widetilde{w}_h(1) = h(\widetilde{x}_0)$ bezeichnet, einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus.
Hinweis: Für die Wohldefiniertheit von Φ zeige man, dass wegen $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = \{1\}$ je zwei zulässige Wege $\widetilde{w}_h, \widetilde{w}'_h$ homotop rel $\{0,1\}$ sind. Für $g, h \in \mathrm{Deck}(p)$ wähle man einen Weg $\widetilde{w}$ in $\widetilde{X}$ mit $\widetilde{w}(0) = g(x_0)$ und $\widetilde{w}(0) = g(h(x_0))$ und folgere $\Psi(g \circ h) = \Psi(g) \cdot \Psi(h)$.

(b) Ist $\widetilde{X}$ zusätzlich zu den in Teil (a) gemachten Annahmen Hausdorff'sch, dann ist Φ injektiv.
Hinweis: Man verwende die Homotopiehochhebungseigenschaft von p, sowie Aufgabe 1(b).

Aufgabe 3. (Das Nagelproblem, Teil IV) *(6 Punkte)*
Sei nun $p : \widetilde{X} \to X$ die Überlagerung aus Aufgabe 4 von Blatt 12 mit $\widetilde{x}_0 := (0,0) \in \widetilde{X}$. Man zeige:

(a) $\widetilde{X}$ ist ein wegzusammenhängender Hausdorffraum mit $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = \{1\}$.
Hinweis: Man verwende die Darstellung $\widetilde{X} = \cup_{n=1}^{\infty} \widetilde{X}_n$ aus Aufgabe 4 von Blatt 12.

(b) Es gilt $[w_a] \cdot [w_b] \cdot [w_a]^{-1} \cdot [w_b]^{-1} \neq 1$ in $\pi_1(X, x_0)$, wobei die Schleifen $w_a, w_b : [0,1] \to X$ bei x_0 die orientierten Kreislinien a bzw. b in X der Orientierung entsprechend parametrisieren.
Hinweis: Seien $h_a, h_b \in \mathrm{Deck}(p)$ mit $h_a(\widetilde{x}_0) = (\frac{2}{3}, 0)$ und $h_b(\widetilde{x}_0) = (0, \frac{2}{3})$ (vgl. Aufgabe 4 von Blatt 12). Wegen $\Psi(h_a) = [w_a]$ und $\Psi(h_b) = [w_b]$ genügt es nach Aufgabe 2 zu zeigen, dass $h_a \circ h_b \circ h_a^{-1} \circ h_b^{-1} \neq \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$ in $\mathrm{Deck}(p)$ gilt.

Aufgabe 4. (Das Nagelproblem, Teil V) *(6 Punkte)*
Ein Gemälde, welches in einen rechteckigen Rahmen eingebettet ist, soll an einer senkrechten Wand aufgehängt werden. Zur Vergfügung stehen zwei Nägel, die bereits in ausreichendem Abstand zueinander und zu den Enden der Wand in der Wand stecken, sowie eine stabile Schnur wählbarer Länge, deren beiden Enden sich an den beiden oberen Ecken des Bilderrahmens befestigen lassen. Man beweise, dass es eine Aufhängung des Gemäldes gibt, die den folgenden Bedingungen genügt:

(1) Solange beide Nägel in der Wand stecken, kann das Gemälde nicht herunterfallen.

(2) Sobald irgendeiner der beiden Nägel entfernt wird, fällt das Gemälde zu Boden.