Übungen zur Mengentheoretischen Topologie

Sommersemester 2014

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dominik Wrazidlo

Blatt 12
Abgabetermin: Mittwoch, 09.07.2014, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*
Seien X und $\widetilde{X}$ topologische Räume und $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Sei ferner $A \subseteq X$ ein Teilraum mit Urbild $\widetilde{A} = p^{-1}(A) \subseteq \widetilde{X}$. Man zeige, dass die durch Einschränkung von p definierte Abbildung $\widetilde{A} \to A$ ebenfalls eine Überlagerung ist.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ein topologischer Raum bestehend aus zwei Kreislinien, die sich in genau einem Punkt $x_0 \in X$ berühren. Man gebe (mit Begründung) einen topologischen Raum $\widetilde{X}$ und eine stetige Abbildung $p : \widetilde{X} \to X$ an, sodass alle der folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $p : \widetilde{X} \to X$ ist eine Überlagerung.
(ii) $\widetilde{X}$ ist zusammenhängend.
(iii) $p^{-1}(x_0)$ besteht aus genau 3 Punkten.
(iv) Zu je zwei Punkten $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in p^{-1}(x_0)$ existiert ein Homöomorphismus $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ mit $h(\widetilde{x}) = \widetilde{x}'$ und $p \circ h = p$.

Aufgabe 3. *(6 Punkte)*
Gegeben seien topologische Räume (X, x_0) und $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ mit Basispunkten, sowie eine Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$. Man zeige:

(a) Die Faser $p^{-1}(x_0) \subseteq \widetilde{X}$ trägt die diskrete Topologie.
(b) Der induzierte Gruppenhomomorphismus $\pi_1(p) : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv.
(c) Ein Element $[w] \in \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert durch eine Schleife w in X bei x_0 liegt genau dann im Bild $\pi_1(p)(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$, wenn die (eindeutig bestimmte) Hochhebung $\widetilde{w}$ von w unter p mit $\widetilde{w}(0) = \widetilde{x}_0$ ebenfalls eine Schleife ist.

Aufgabe 4. (Das Nagelproblem, Teil I) *(6 Punkte)*
Wie in Aufgabe 2 sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ ein topologischer Raum bestehend aus zwei (in dieser Aufgabe orientierten) Kreislinien, im Folgenden mit a und b bezeichnet, die sich in genau einem Punkt $x_0 \in X$ berühren. Eine Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ kann wie folgt konstruiert werden.
Sei $\widetilde{X}_1$ die Vereinigung der beiden offenen Intervalle $(-1, 1)$ in den Koordinatenachsen von $\mathbb{R}^2$. Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ wird nun $\widetilde{X}_{n+1}$ folgendermaßen induktiv aus $\widetilde{X}_n$ konstruiert. An jedes halboffene Endstück in $\widetilde{X}_n$ wird ein offenes Intervall der Länge $\frac{2}{3^n}$ im Abstand $\frac{1}{3^n}$ vom Ende angefügt, wobei die neuen Intervalle senkrecht angefügt und von den bestehenden Segmenten halbiert werden sollen. Sei nun $\widetilde{X}$ die Vereinigung aller $\widetilde{X}_n$.
Zur Konstruktion von p werden die horizontalen Kanten zwischen benachbarten Kreuzungspunkten in $\widetilde{X}$ von links nach rechts orientiert und mit a beschriftet, und die vertikalen Kanten von unten nach oben orientiert und mit b beschriftet. Die Abbildung $p : \widetilde{X} \to X$ schicke nun alle Kreuzungspunkte auf x_0 und die dazwischen liegenden Kanten entsprechend ihrer Orientierung und Beschriftung auf die Kreislinien a und b, sodass p eingeschränkt auf das Innere der Kanten ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

(a) Man skizziere $\widetilde{X}_5$.
(b) Man zeige, dass es sich bei $p : \widetilde{X} \to X$ um eine Überlagerung handelt.
(c) Man bestimme einen Homöomorphismus $h_a : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ mit $h_a(0, 0) = (0, \frac{2}{3})$ und $p \circ h_a = p$.