

Übungen zur Mengentheoretischen Topologie

Sommersemester 2014

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dominik Wrazidlo

Blatt 11
Abgabetermin: Mittwoch, 02.07.2014, 9.15 Uhr

Aufgabe 1. (6 Punkte)

Gegeben seien zwei zueinander homotopieäquivalente topologische Räume X und Y . Man beweise oder widerlege:

- (a) Ist X kompakt, so ist auch Y kompakt.
- (b) Ist X zusammenhängend, so ist auch Y zusammenhängend.
- (c) Ist X Hausdorff'sch, so ist auch Y Hausdorff'sch.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Die Menge $\mathbb{R}^\infty := \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}; x_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$ kann geschrieben werden als

$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n \supseteq \dots \supseteq \mathbb{R}^n \supseteq \dots \supseteq \mathbb{R}^1,$$

wobei $\mathbb{R}^n$ via $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^\infty$ aufgefasst wird. $\mathbb{R}^\infty$ wird in folgender Weise mit einer Topologie versehen: Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^\infty$ sei genau dann offen, wenn der Schnitt $U \cap \mathbb{R}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Man zeige:

- (a) Die Abbildung $T : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$, $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, ist stetig.
- (b) $\mathbb{S}^\infty := \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty; x_1^2 + x_2^2 + \dots = 1\}$ ist zusammenziehbar.

Hinweis: Man zeige, dass $T|_{\mathbb{S}^\infty} : \mathbb{S}^\infty \rightarrow \mathbb{S}^\infty$ einerseits homotop zu $\text{id}_{\mathbb{S}^\infty}$ und andererseits nullhomotop (z.B. homotop zur konstanten Abbildung $c_{(1,0,0,\dots)}$) ist.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Ein Teilraum $A \subseteq X$ eines topologischen Raums X heißt *Deformationsretrakt* von X , wenn eine Homotopie $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- (d1) $F(x, 0) = x$ für alle $x \in X$.
- (d2) $F(a, t) = a$ für alle $a \in A$ und $t \in [0, 1]$.
- (d3) $F(x, 1) \in A$ für alle $x \in X$.

Man zeige:

- (a) $(\mathbb{D}^1 \times \{0\}) \cup (\partial \mathbb{D}^1 \times [0, 1])$ ist ein Deformationsretrakt von $\mathbb{D}^1 \times [0, 1]$. (Hierbei bezeichnet $\mathbb{D}^1 = \{x \in \mathbb{R}^1; |x| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe.)
- (b) Ist $A \subseteq X$ ein Deformationsretrakt von X und $x_0 \in A$ ein Basispunkt, so ist der von der Inklusion $i : A \hookrightarrow X$ induzierte Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(i) : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

ein Isomorphismus.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender topologischer Raum mit Basispunkt. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $\pi_1(X, x_0)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h. $[w] \cdot [w'] = [w'] \cdot [w]$ für alle $[w], [w'] \in \pi_1(X, x_0)$.
- (ii) Für jedes Paar (y_0, y_1) von Punkten in X gibt es einen Gruppenhomomorphismus $h(y_0, y_1) : \pi_1(X, y_1) \rightarrow \pi_1(X, y_0)$, sodass für jeden Weg $p : [0, 1] \rightarrow X$ mit $p(0) = y_0$ und $p(1) = y_1$ gilt: $h_p = h(y_0, y_1)$. (Hier bezeichnet h_p den von p induzierten Homomorphismus

$$h_p : \pi_1(X, y_1) \rightarrow \pi_1(X, y_0), \quad [w] \mapsto [p * w * p^-].$$