Mathematik für Physiker, Teil 1

${\bf Sommersemester~2009}$

Sigrid Böge

Inhaltsverzeichnis

1. Lineare Gleichungen	2
2. Vektorräume	5
3. Lineare Abbildungen und Matrizen	10
4. Determinanten	16
5. Symmetrische Bilinearformen	23
6. Der Euklidische \mathbb{R}^n	28
7. Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n	35
8. Taylorformel	41
9. Der Umkehrsatz	44
10. Implizite Funktionen, Extrema mit Nebenbedingungen	48
11. Eigenwerte und direkte Zerlegung, Anwendung auf lineare	51
Differentialgleichungen	
12. Jordansche Normalform, Systeme mit konstanten Koeffizienten	56
13. Spektralsatz	62
14. Fourierreihen	65
15. Integral rechnung im \mathbb{R}^n	71
16. Anwendung von Transformationsformel und Fubini zur Berechnung	88
einiger spezieller Integrale	
17. Kurven	96
18. Oberflächenmessung im \mathbb{R}^3	109
19. k-dimensionale Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n	115

1. Lineare Gleichungen

Beispiel: Der Stromfluß in einem Netz wird durch die Kirchhoffschen Regeln beherrscht:

- 1. An jedem Verzweigungspunkt ist die Summe aller ankommenden gleich der Summe aller abfließenden Ströme.
- 2. Auf jedem geschlossenen Weg ist die Summe aller Spannungsabfälle gleich 0.

Ferner gilt das Ohmsche Gesetz:

$$U = I \cdot R$$

Ist x_i der Strom auf dem Teilstück mit dem (bekannten) Widerstand r_i , so bedeuten die Regeln ein System von linearen Gleichungen (Definition unten) für die x_i , nämlich, wenn die Ströme orientiert werden, $\sum_i x_i = 0$ an den Knoten und $\sum_i r_i x_i = 0$ auf geschlossenen Wegen.

Zur Motivation lösen wir die

Aufgabe: Man berechne den Gesamtwiderstand für den Stromfluß auf den Kanten eines Würfels, wenn jede Kante den Widerstand 1 besitzt und der Ausgang wie gezeichnet bei 5 und der Eingang bei 1 ist.

Um die Zahl der Unbekannten (12 Kanten) zu reduzieren, nutzen wir die Symmetrie in der Aufgabe aus. Offenbar kann man den Würfel an der Ebene 1357 spiegeln, ohne die Vorgaben zu stören. Deshalb sind die Ströme auf 12 und 14 gleich, etwa = x, und dann ist

$$I = 2x + w$$

nach 1. Die Bilanz in 5 statt 1 zeigt, daß auf 56 und 58 der Strom -x fließt. Wenn auf 23 der Strom y fließt, dann haben wir x-y auf 26 und auf 48.

Spanningsabfall vorne : x + x - y + x - w = 0

Spanningsabfall rechts: y + 2y + y - (x - y) = 0

Wir finden x = 5y und w = 3x - y = 14y und I = 2x + w = 24y. Der Spannungsabfall vom Eingang 1 zum Ausgang 5 ist w (weil r = 1), und der Gesamtwiderstand ist

$$R = \frac{w}{I} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

Wenn I gegeben ist, dann sind x, y, w die Lösungen von

Definition: Sind a_{ij}, b_i reelle Zahlen, so heißt

ein lineares Gleichungssystem von m Gleichungen für die n Unbekannten $x_1, ..., x_n$.

Ziel ist, die sämtlichen n-Tupel $x_1, ..., x_n$ zu finden, welche alle diese Gleichungen erfüllen, oder erstmal festzustellen, ob das System überhaupt lösbar ist. Wenn zum Beispiel alle $a_{ij} = 0$ sind aber nicht alle b_i , dann ist das System sicherlich nicht lösbar.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren:

- 1. Wenn nicht alle a_{i1} null sind, dann vertauscht man die Gleichungen, so daß (in neuer Numerierung) $a_{11} \neq 0$. Dadurch ändert sich die Lösungsmenge nicht.
- 2. Wenn alle $a_{i1} = 0$ sind, dann hat man ein System für $x_2, ..., x_n$. Man sucht davon alle Lösungen und setzt x_1 beliebig fest.
- 3. Man kann also ausgehen von einem System mit $a_{11} \neq 0$. Dann subtrahiert man das $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ -fache der ersten Zeile von der i-ten. Dadurch erhält man das System

Das so erhaltene System hat genau dieselben Lösungen wie das ursprüngliche.

Auf die Zeilen Nr. 2 bis m in (L') wendet man wieder die Schritte 1,2,3 an usw. Um das Ergebnis glatter formulieren zu können, modifiziert man Schritt 2: Nach Schritt 2 kann man eine Unbekannte beliebig festsetzen, wenn in der gerade erreichten Matrix die erste Spalte nur aus Nullen besteht. Auf diese Weise könnte es passieren, daß man die Unbekannten Nummer 1,5 und 7 beliebig festsetzt, während die übrigen aus dem Verfahren als eindeutig bestimmt hervorgehen. Deshalb vertauscht man notfalls die Unbekannten, so daß, wenn überhaupt noch von 0 verschiedene Koeffizienten auf der linken Seite stehen, die erste Spalte nicht aus lauter Nullen besteht. Dadurch ändert sich zwar die Lösungsmenge, aber wenn man am Schluß die Vertauschung der Unbekannten wieder rückgängig macht, erhält man doch wieder die Lösungen des gegebenen Systems.

Ergebnis: Durch

- 1. Vertauschen von Gleichungen
- 2. Vertauschen von Unbekannten
- 3. Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

kann man (mit einer gewissen Zahl r und neuen Koeffizienten c_{ij}, d_i das lineare Gleichungssystem (L) auf die Gestalt

bringen mit $c_{11}c_{22}...c_{rr} \neq 0$. Das System (D) ist lösbar genau dann, wenn $d_{r+1} = = d_m = 0$. In diesem Falle erhält man alle Lösungen, indem man $x_{r+1},....,x_n$ beliebig festsetzt und $x_r,x_{r-1},...,x_1$ rekursiv

(von unten nach oben) bestimmt. Das eben beschriebene Verfahren mit den Schritten 1,2,3 nennt man das Gaußsche Eliminationsverfahren.

Beispiele:

$$n = 3, m = 2$$

Lösungen: x_3 beliebig, $x_2 = 1 - 2x_3$, $x_1 = x_3 - 1$.

$$n = 2, m = 3$$

Einzige Lösung: $x_2 = 0$, $x_1 = 1$

Stünde in der letzten Zeile des gegebenen Systems auf der rechten Seite eine andere Zahl als 3, so wäre das System unlösbar.

$$m = n = 3$$

Das System ist unlösbar.

Beobachtungen: 1. Wir fanden immer keine, genau eine oder unendlich viele, aber zum Beispiel niemals genau 3 Lösungen. Ist das immer so?

2. Wir addieren n-Tupel komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Die Differenz von zwei Lösungen von (L) ist eine Lösung des "zu (L) gehörenden homogenen Systems" $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{j} = 0$, (i = 1, ..., m):

Definition: Das lineare Gleichungssystem (L) heißt homogen, wenn alle $b_i = 0$.

Man erhält alle Lösungen von (L), indem man zu einer festen Lösung die sämtlichen Lösungen des zu (L) gehörenden homogenen Systems addiert.

- 3. Ein homogenes System hat immer die Lösung $x_i = 0$ für alle i. Diese nennt man die triviale Lösung.
- 4. Ein homogenes System mit echt mehr Unbekannten als Gleichungen hat immer auch eine nicht triviale Lösung. Das sieht man daran, daß in (D) alle $d_i = 0$ sind und $r \leq m < n$.
- 5. Die Summe zweier Lösungen eines homogenen Systems ist auch eine Lösung, ebenso jedes (komponentenweise gebildete) reelle Vielfache.
- 6. Das Verfahren hat auf eine Zahl r geführt, die höchstens so groß ist wie die kleinere der beiden Zahlen m und n. Ist diese durch das System bestimmt, oder hängt sie womöglich davon ab, auf welche Weise man die Gestalt (D) hergestellt hat?

Die Beobachtungen 2 bis 5 führen auf die Begriffe des nächsten Kapitels, in welchem wir dann auch die Fragen 1 und 6 beantworten werden.

2. Vektorräume

Wir knüpfen an die Beobachtung 5 das vorigen Kapitels an.

Definition: Eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe ist eine nicht leere Menge A mit einer Abbildung

$$A \times A \rightarrow A$$

$$(a,b) \mapsto a+b$$

welche die folgenden Regeln erfüllt:

- 1. a + (b + c) = (a + b) + c
- (assoziativ)

- 2. a + b = b + a
- (kommutativ)
- 3. Es gibt $0 \in A$ mit a + 0 = a für alle $a \in A$ 4. Zu $a \in A$ gibt es $b \in A$ mit a + b = 0

Bemerkungen:

1. Die nach 3. existierende 0 ist einzig; denn wenn auch a+0'=a für alle a, dann ist (die Kommutativität benutzend)

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

2. Das nach 4 existierende b ist durch a bestimmt; denn wenn auch a + b' = 0, dann ist

$$b = b + 0 = b + (a + b') = (b + a) + b' = (a + b) + b' = 0 + b' = b'$$

Das b in 4 wird mit -a bezeichnet.

Defintion: Ein reeller Vektorraum ist eine abelsche Gruppe V, +, deren Elemente man mit reellen Zahlen multiplizieren kann, so daß für alle reellen λ, μ und alle $x, y \in V$ die folgenden Regeln gelten:

- 1. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- $2. \ \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
- 3. $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$
- 4. 1 x = x

Beispiele:

- 1. $V = \mathbb{R}$ oder $V = \mathbb{C}$
- 2. V = Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf dem Intervall [0,1]
- 3. V = Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf \mathbb{R}
- 4. V = Vektorraum aller Funktionen aus Beispiel 3 mit <math>y'' = y
- 5. Standardbeispiel: V = Vektorraum aller n-Tupel reeller Zahlen mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Dieser Vektorraum wird mit \mathbb{R}^n bezeichnet.

Definition: Eine Teilmenge U eines Vektorraumes V heißt ein Untervektorraum, wenn für $x, y \in U$ auch die (in V erklärte) Summe x+y zu U gehört, und wenn für $x \in U$ auch alle λx (λ reell) zu U gehören. Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$ und

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \text{ für } i = 1, ..., m \right\}$$

die Menge der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems. Die Aufgabe aus Kap 1, nämlich alle Lösungen eines (hier speziell homogenen) Gleichungssystems zu finden, können wir also auch aufassen als

Aufgabe, den Unterraum U irgendwie zu beschreiben. Um das zu tun, brauchen wir erst noch einmal 3 Definitionen:

Definition: Sei V ein Vektorraum und $v_1,...,v_m \in V$. Jeder Vektor der Gestalt

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$$
 mit reellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

heißt eine Linearkombination von $v_1, ..., v_m$.

Die sämtlichen Linearkombinationen von m Vektoren $v_1,...,v_m$ bilden einen Untervektorraum von V. Dieser heißt der von $v_1,...,v_m$ aufgespannte Unterraum und wird mit $< v_1,...,v_m >$ bezeichnet.

 ${\it Definition}$: Ein System von Vektoren, die V aufspannen, nennt man ein Erzeugendensystem von V.

Beispiel:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 11x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Nach dem Gaußschen Verfahren ist das Gleichungssystem äquivalent zu

 x_3 und x_4 sind beliebig wählbar, etwa $x_3=\lambda$ und $x_4=\mu$. Dann ist $x_2=\lambda+3\mu$ und $x_1=-5\lambda-10\mu$. Der Raum besteht aus allen

$$\begin{pmatrix} -5\lambda - 10\mu \\ \lambda + 3\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit reellen λ,μ . Die beiden letzten Spalten spannen den Raum V auf.

Entsprechend dem Wunsch, mit möglichst wenigen Erzeugenden auszukommen und "überflüssige" wegzulassen, kommt

Definition: k Vektoren $v_1, ..., v_k$ eines Vektorraumes heißen linear abhängig, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_k$ gibt, die nicht alle 0 sind, so daß

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

Beispiele:

- 1. k Vektoren, von denen einer 0 ist, etwa v_1 , sind linear abhängig: man nehme $\lambda_1=1$ und alle übrigen $\lambda_i=0$.
- 2. Zwei Vektoren $x,y\in\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig, wenn $x_iy_j=x_jy_i$ für alle i,j, nämlich:
- " \Leftarrow " Ist x = 0, so ist das klar (siehe 1.). Ist $x \neq 0$ und zum Beispiel $x_k \neq 0$, so setzt man $\lambda = \frac{y_k}{x_k}$ und hat $y = \lambda x$.
- " \Rightarrow " Ist $\lambda x_i + \mu y_i = 0$ für alle i, so subtrahiert man das y_j -fache der i-ten Gleichung vom y_i -fachen der j-ten und erhält $\lambda(y_i x_j y_j x_i) = 0$. Genauso erhält man $\mu(x_j y_i x_i y_j) = 0$. Da λ und μ nicht beide 0 sind, folgen die behaupteten Gleichungen.
 - 3. Sind k Vektoren linear abhängig, so gibt es mindestens einen unter ihnen, der eine Linearkombination der übrigen ist.

Um zu sehen, daß k Vektoren $v_1,...,v_k$ linear unabhänging sind, muß man einsehen, daß

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$$
 NUR DANN möglich ist, wenn $\lambda_1 = = \lambda_k = 0$

Beispiel:

1. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn

$$\lambda + \mu = 0$$
 und $\lambda - \mu = 0$ erzwingt, daß $\lambda = \mu = 0$

- 2. Die reellwertigen Funktionen $P_0(t)=1, P_1(t)=t,..., P_k(t)=t^k$ sind linear unabhängig; denn $\lambda_0 P_0+...+\lambda_k P_k=0$ bedeutet, daß das Polynom $\lambda_0 P_0+...+\lambda_k P_k$ bei allen Einsetzungen t den Wert 0 ergibt. Ein Polynom k-ten Grades hat aber höchstens k reelle Nullstellen.
- 3. Noch einfacher ist zu sehen, daß die Funktionen sin und cos linear unabhängig sind: Man setze die Argumente 0 und $\frac{\pi}{2}$ ein.

Die einzige Invariante (im in Kap 3 zu klärenden Sinne) eines Vektorraumes ist seine Dimension. Um diese vernünftig zu definieren, beweisen wir das

Lemma 1.: Sei V ein Vektorraum und

 $v_1, ..., v_m$ ein Erzeugendensystem von V

 $u_1, ..., u_k$ linear unabhängig in V

Dann ist $k \leq m$.

Beweis durch Induktion nach m: Für m=1 besteht V aus den Vielfachen eines Vektors v, und je zwei von diesen sind linear abhängig. Also ist $k \le 1 (= m)$.

Nun sei m > 1 und das Lemma bewiesen für alle Vektorräume, die sich mit m - 1 Vektoren erzeugen lassen. Da V von $v_1, ..., v_m$ erzeugt wird, sind die u_i Linearkombinationen von ihnen:

$$\begin{array}{rcl}
u_1 & = & \alpha_{11}v_1 & + & \dots & + & \alpha_{1m}v_m \\
\vdots & & & & & \\
u_k & = & \alpha_{k1}v_1 & + & \dots & + & \alpha_{km}v_m
\end{array}$$

Wenn $\alpha_{1m}=...=\alpha_{km}=0$, dann liegen $u_1,...,u_k$ bereits in dem von $v_1,...,v_{m-1}$ erzeugten Teilraum, und Anwendung der Induktionsannahme auf diesen ergibt $k\leq m-1$, erst recht $k\leq m$. Sind $\alpha_{1m},...,\alpha_{km}$ nicht alle 0, so ist (notfalls nach Umnumerierung der u_j) $\alpha_{km}\neq 0$. Dann ist

$$v_m = \frac{1}{\alpha_{km}} u_k - \frac{\alpha_{k1}}{\alpha_{km}} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{k,m-1}}{\alpha_{km}} v_{m-1}$$

Diesen Ausdruck für v_m setzt man in (1) ein und sortiert (alle u nach links, alle v nach rechts). Dadurch erhält man mit gewissen neuen Koeffizienten β_i, β_{ij}

$$u_{1} - \beta_{1}u_{k} = \beta_{11}v_{1} + \dots + \beta_{1,m-1}v_{m-1}$$

$$\vdots$$

$$u_{k-1} - \beta_{k-1}u_{k} = \beta_{k-1,1}v_{1} + \dots + \beta_{k-1,m-1}v_{m-1}$$

Die k-1 Vektoren auf der linken Seite sind linear unabhängig; denn angenommen

$$\lambda_1(u_1 - \beta_1 u_k) + \ldots + \lambda_{k-1}(u_{k-1} - \beta_{k-1} u_k) = 0$$

Durch Sortieren erhält man

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + (-\lambda_1 \beta_1 - \ldots - \lambda_{k-1} \beta_{k-1}) u_k = 0$$

Weil $u_1, ..., u_k$ linear unabhängig sind, folgt in der Tat $\lambda_1 = ... = \lambda_{k-1} = 0$.

Nun wenden wir die Induktionsannahme an auf den Unterraum mit den Erzeugenden $v_1,...,v_{m-1}$ und den linear unabhängigen Vektoren $u_1-\beta_1u_k,....,u_{k-1}-\beta_{k-1}u_k$ darin. Danach ist $k-1\leq m-1$, also $k\leq m$, was zu beweisen war.

Aus diesem wichtigen Lemma 1 folgt nun alles andere:

Satz 1. Die folgenden beiden Aussagen sind gleichwertig:

- (a) V besitzt ein endliches Erzeugendensystem
- (b) Es gibt eine natürliche Zahl m, so daß je m+1 Vektoren aus V linear abhängig sind.

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$: Wird V von m Vektoren erzeugt, so sind nach Lemma 1 je m+1 Vektoren linear abhängig.

 $(b) \Rightarrow (a)$: Gibt es eine natürliche Zahl m mit (b), so gibt es auch eine kleinste solche. Ist m minimal mit (b), so hat m-1 nicht mehr die Eigenschaft (b), das heißt, es gibt m linear unabhängige Vektoren $v_1, ..., v_m$, aber je m+1 Vektoren sind linear abhängig. Für jeden Vektor $v \in V$ gibt es eine Relation, in der nicht alle Koeffizienten 0 sind,

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$$

Da $v_1,...,v_m$ linear unabhängig sind, ist $\lambda \neq 0$, und v ist eine Linearkombination von $v_1,...,v_m$. Da $v \in V$ beliebig war, ist $V = \langle v_1,...v_m \rangle$.

Das im Beweis von Satz 1 erhaltene Erzeugendensystem war auch linear unabhängig.

Definition: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt Basis.

Es folgt

Satz 2. Jeder Vektorraum mit den Eigenschaften (a) und (b) besitzt eine Basis.

(In Wahrheit besitzt jeder Vektorraum eine Basis, aber wir haben gar nicht erklärt, was das heißen soll, wenn (a) und (b) nicht gelten.)

Satz 3. Alle Basen eines Vektorraumes mit (a) und (b) enthalten gleich viele Vektoren.

Beweis: Nach (b) sind alle Basen endlich. Seien nun $u_1,...,u_m$ und $v_1,...,v_n$ zwei Basen.

$$\begin{array}{ll} u_1,...,u_m & \text{Erzeugendensystem} \\ v_1,...,v_n & \text{linear unabhängig} \end{array} \} \Rightarrow n \leq m$$

nach Lemma 1. Genauso ist $m \le n$, zusammen m = n.

Definition: Die gemeinsame Länge aller Basen eines Vektorraumes mit (a) und (b) heißt seine Dimension, bezeichnet $\dim V$. Ein Vektorraum, in dem (a) und (b) nicht gelten, heißt unendlich-dimensional.

Beispiel: 1. Der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten ist unendlich-dimensional; denn $1,t,t^2,t^3,....,t^m$ sind linear unabhängig für jedes m. Erst recht ist der Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb R$ unendlich-dimensional.

2. Die Spalten

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig und spannen \mathbb{R}^n auf. Sie bilden also eine Basis:

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

2. Die n-1 Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1\\1\\0\\\vdots\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\\vdots\\0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\\vdots\\1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig und spannen den Raum aller x mit $x_1 + x_2 + + x_n = 0$ auf. Dieser ist also (n-1)-dimensional.

3. V sei der Vektorraum aller differenzierbaren reellwertigen Funktionen f auf \mathbb{R} mit f' = f. Offenbar gehört die Funktion $g(x) = e^x$ zu V. Sei $f \in V$ beliebig. Es ist

$$(e^{-x}f)' = e^{-x}f' - e^{-x}f = 0$$

(da f'=f). Also ist $e^{-x}f$ konstant und f ein reelles Vielfaches von e^x . Das zeigt dim V=1.

Wir beschließen das Kapitel mit dem wichtigen Basisergänzungssatz:

Satz 4. Seien $u_1, ..., u_k \in V$ linear unabhängig und $v_1, ..., v_m$ Erzeugende von V. Dann kann man von den v_i passende aussuchen, die zusammen mit $u_1, ..., u_k$ eine Basis von V bilden.

Beweis: Die Menge $M = \{1, 2, ..., m\}$ hat 2^m Teilmengen. Unter diesen suchen wir alle $I = \{i_1, ..., i_p\}$ heraus, für die $u_1, ..., u_k, v_{i_1}, ..., v_{i_p}$ linear unabhängig sind. Solche I nennen wir für den Moment zulässig. Nach Voraussetzung ist die leere Menge zulässige. (Es ist nicht ausgeschlossen, daß sie die einzige zulässige Menge ist). Wir wählen eine maximale zulässige Menge (es kann durchaus mehrere solche geben), etwa $I = \{i_1, ..., i_r\}$.

- 1. I zulässig $\Rightarrow u_1, ...u_k, v_{i_1}, ...v_{i_r}$ linear unabhängig
- 2. I maximal \Rightarrow für alle $j \in M, j \notin I$ sind $v_j, u_1, ..., u_k, v_{i_1}, ..., v_{i_r}$ linear abhängig.

Daraus folgt: jedes v_j ist eine Linearkombination von $u_1,...,u_k,v_{i_1},...,v_{i_r}$. Nun folgt

$$V = \langle v_1, ..., v_m \rangle = \langle u_1, ..., u_k, v_{i_1}, ..., v_{i_r} \rangle$$

Zusammen mit 1. ist das die Behauptung.

Von diesem Satz wird oft nur die Vergröberung benutzt: Jedes linear unabhängige System läßt sich zu einer Basis ergänzen.

Aus diesem Kap merke:

Basis = linear unabhängiges Erzeugendensystem

- = möglichst kurzes Erzeugendensystem
- = möglichst langes linear unabhängiges System.

Lebenszweck von Basis: Jeder Vektor läßt sich auf genau eine Weise als Linearkombination der Basisvektoren schreiben. Ordnet man jedem Vektor aus V das n-Tupel seiner Koeffizienten in einer solchen Darstellung zu, so erhält man einen "Isomorphismus" von V auf den Vektorraum aller n-Tupel, also den \mathbb{R}^n . Zu "Isomorphismus" siehe nächstes Kapitel.

3. Lineare Abbildungen und Matrizen

Hat man eine Klasse von Objekten (z.B. Vektorräumen) mit einer gewissen Struktur erklärt, so betrachtet man die Struktur erhaltenden Abbildungen zwischen diesen Objekten:

Definition: Eine lineare Abbildung von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W ist eine Abbildung ϕ von V nach W, welche

$$\phi(\lambda x + \mu y) = \lambda \phi(x) + \mu \phi(y)$$

für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ erfüllt. Ist $W = \mathbb{R}$, so nennt man ϕ auch eine lineare Funktion (oder Linearform)

Beispiele:

1. V = Vektorraum aller reellwertigen stetigen Funktionen auf $[-1,1], W = \mathbb{R}$ und

$$\phi(f) = f(0)$$
 für alle $f \in V$

2. V und W wie in 1. und

$$\phi(f) = \int_{-1}^{1} f(x) \, dx \text{ für alle } f \in V$$

Kurz: Integrieren ist linear.

3. V = W = Vektorraum alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb R$ und

$$\phi(f) = f'$$
 (Ableitung) für alle $f \in V$

Kurz: Differenzieren ist linear.

4. $V = W = \mathbb{R}^2$ und

$$\phi\left(\begin{array}{c} x_1\\ x_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} x_1 + x_2\\ x_2 \end{array}\right)$$

Explizite Beschreibung von linearen Abbildungen:

Sei $v_1,...v_m$ eine Basis von V und $w_1,...,w_n$ eine Basis von W. Eine lineare Abbildung von V nach W ist bestimmt durch die Bilder von $v_1,...,v_m$; denn jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine Darstellung

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$$
 mit durch v eindeutig bestimmten λ_i ,

und

$$\phi(v) = \lambda_1 \phi(v_1) + \dots + \lambda_m \phi(v_m)$$

Die Vektoren $\phi(v_i)$ sind als Vektoren in W in eindeutiger Weise darstellbar als Linearkombinationen der Basisvektoren w_i :

(1)
$$\phi(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{ni}w_n, \quad i = 1, \dots, m$$

Die lineare Abbildung ϕ ist also vollständig beschrieben durch $n\,m$ Zahlen a_{ji} , welche man üblicherweise in einem rechteckigen Schema anordnet:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Definition: Ein rechteckiges Zahlenschema heißt Matrix.

Die obige Matrix A besitzt n Zeilen und m Spalten. Die Zeilen werden durch den ersten, die Spalten durch den zweiten Index numeriert. Man nennt auch A eine $n \times m$ -Matrix.

Jede lineare Abbildung von V nach W wird also NACH WAHL von BASEN in V bzw. W durch eine $n \times m$ -Matrix A beschrieben. Umgekehrt: Für beliebig gegebene a_{ij} beschreiben die Gleichungen (1) eine lineare Abbildung von V nach W. Merke:

 $\{ \text{ Lineare Abbildungen } \phi \} \stackrel{nach}{\longleftrightarrow} \stackrel{Basiswahl}{\longleftrightarrow} \{ \text{ Matrizen } A \}$

(2)
$$\operatorname{verm\"{o}ge} \quad \phi(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} w_j, \quad i = 1, ...m$$

Zusammensetzung linearer Abbildungen: Gegeben sind zwei lineare Abbildungen $\phi: V \to W$ und $\psi: U \to V$:

$$U \to V \qquad V \to W$$

$$\psi(u_i) = \sum_j b_{ji} v_j \quad \phi(v_j) = \sum_k a_{kj} w_k$$

Die Zusammensetzung "erst ψ , dann ϕ " oder " ϕ hinter ψ ", üblicherweise bezeichnet mit $\phi \circ \psi$, ist definiert durch

$$(\phi \circ \psi)(x) = \phi(\psi(x))$$

Sie ist offensichtlich auch linear, und ihre Matrix bezüglich der Basen u_i von U und w_k von W ist leicht zu bestimmen:

$$(\phi \circ \psi)(u_i) = \phi(\sum_j b_{ji}v_j) = \sum_j b_{ji}\phi(v_j) \qquad (\text{weil } \phi \text{ linear })$$
$$= \sum_j b_{ji} \sum_k a_{kj}w_k = \sum_k \{\sum_j a_{kj}b_{ji}\} w_k$$

Wir lesen die Koeffizienten c_{ki} der Matrix C ab, welche $\phi \circ \psi$ bezüglich der Basen u_i von U und w_k von W beschreibt:

(3)
$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} b_{ji}, \quad i = 1, ..., \dim U, \quad k = 1, ..., \dim W \quad (m = \dim V)$$

Definition: Die Matrix C mit den Koeffizienten c_{ki} aus (3) heißt das Produkt der Matrizen A und B:

$$C = AB$$

Achtung! Das Produkt AB kann nur gebildet werden, wenn A soviele Spalten hat wie B Zeilen. Das Ergebnis ist eine Matrix, die so viele Zeilen hat wie A und so viele Spalten wie B.

Beispiele:

$$(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

wobei wir Zahlen als einreihige Matrizen auffassen.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n) = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & & a_2b_n \\ \vdots & & & & \\ a_nb_1 & & & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ. Das brauchen wir aber nicht nachzurechnen; es folgt daraus, daß die Hintereinanderausführung von Abbildungen assoziativ ist.

Der \mathbb{R}^n besitzt eine natürliche Basis, die sogenannte Standardbasis, bestehend aus den Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nur für den Moment, um Bezeichnungskollisionen zu vermeiden, bezeichnen wir die analoge Standardbasis des \mathbb{R}^m mit $f_1, ..., f_m$. Ist nun wie in (2)

$$\phi(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j,$$

so gilt für einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$

$$\phi(x) = \phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = \phi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ji} f_j =$$

$$\sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i) f_j = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} x_i \end{pmatrix} = A x$$

das letzte Produkt im Sinne der Matrizenmultiplikation Matrix mal Spalte:

Die linearen Abbildungen des \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m sind die Multiplikationen der Spalten von links mit Matrizen (des Formats $m \times n$).

Zu jeder linearen Abbildung $\phi: V \to W$ gehören zwei Unterräume in V bzw. W: Die Vektoren $x \in V$, für die $\phi(x) = 0$, bilden einen Unterraum von V.

Definition : Dieser heißt der Kern von $\, \phi \, .$

Haben zwei Vektoren aus V gleiches Bild unter ϕ , so liegt ihre Differenz im Kern von ϕ . Die Abbildung ϕ ist also injektiv genau dann wenn ihr Kern 0 ist.

Definition: Die sämtlichen Vektoren $\phi(x) \in W$, wenn x durch V läuft, bilden einen Unterraum von W. Dieser heißt das Bild von ϕ .

Satz 5. Für jede lineare Abbildung ϕ von V nach W gilt

$$\dim Bild \phi + \dim Kern \phi = \dim V$$

Beweis: Man wählt in W eine Basis von Bild ϕ . Diese Vektoren sind alle ein $\phi(x)$, $x \in V$, sie seien $\phi(v_1),...,\phi(v_r)$. Da sie linear unabhängig sind, sind erst recht $v_1,...,v_r$ linear unabhängig. Ist $v \in V$ beliebig, so ist $\phi(v) \in \text{Bild } \phi$ eine Linearkombination der $\phi(v_i)$, etwa

$$\phi(v) = \lambda_1 \phi(v_1) + \dots + \lambda_r \phi(v_r) = \phi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r)$$

Das bedeutet

$$(1) v - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_r v_r \in \text{Kern } \phi$$

Sei $u_1,...,u_k$ eine Basis von Kern ϕ . Gleichung (1) zeigt, daß $v_1,...,v_r,u_1,...,u_k$ den Raum V aufspannen. Sie sind aber auch linear unabhängig:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_k u_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 \phi(v_1) + \ldots + \lambda_r \phi(v_r) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0 \Rightarrow \mu_1 = \ldots = \mu_k = 0$$

Jetzt wollen wir die Dimension des Bildes an der Matrix ablesen: Das Bild wird aufgespannt von den Vektoren $\phi(v_1),....,\phi(v_n)$, wenn $v_1,....,v_n$ eine Basis von V ist. Die Dimension des Bildes ist die größtmögliche Zahl linear unabhängiger unter diesen. Für irgendwelche r unter ihnen, numerieren wir sie bequemlichkeitshalber $v_1,...,v_r$ gilt

$$\phi(v_1),...,\phi(v_r)$$
 linear abhängig \iff

es gibt
$$\lambda_1,...,\lambda_r$$
, nicht alle 0, mit $0=\sum_{i=1}^r\lambda_i\phi(v_i)=\sum_{i=1}^r\lambda_i\sum_ja_{ji}w_j=\sum_j\{\sum_{i=1}^r\lambda_ia_{ji}\}w_j$

Da die w_j linear unabhängig sind, ist die letzte Zeile gleichbedeutend damit, daß $\sum_{i=1}^r \lambda_i a_{ji} = 0$ für alle j. Das ist eine lineare Relation zwischen den Spalten der Matrix A. Es folgt: Die Dimension des Bildes (d.h. die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Vektoren $\phi(v_1),, \phi(v_n)$) ist genau so groß wie die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Spalten der Matrix A.

Definition: Die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Spalten einer Matrix A heißt der Spaltenrang von A.

Wie kann man den Spaltenrang einer gegebenen Matrix A bestimmen? Wir zeigen, daß der Spaltenrang sich nicht ändert bei den Manipulationen 1,2,3 des Gaußverfahrens aus Kap 1, welches sinngemäß auf die Matrix A der Koeffizienten a_{ij} des Gleichungssystems anzuwenden ist:

- 1. Vertauschen von Zeilen: Daß eine Linearkombination von Spalten 0 ist, bedeutet, daß sie komponentenweise 0 ist. Daran ändert sich nichts, wenn man die Komponenten (i.e. die Zeilen der Matrix) vertauscht.
- 2. Vertauschen von Spalten: Das ist klar.
- 3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen: Bequemlichkeitshalber addieren wir das λ -fache der zweiten Zeile zur ersten. Dadurch erhalten wir aus A die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & \dots & a_{1n} + \lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Jede lineare Relation zwischen den Spalten der Matrix A zieht dieselbe Relation zwischen den Spalten dieser Matrix nach sich und umgekehrt.

Durch die Manipulationen 1,2,3 haben wir in Kap 1 jede Matrix A in eine Matrix der Gestalt

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & & c_{1n} \\ & c_{22} & \dots & & c_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & c_{rr} & \dots & c_{rn} \\ & & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht mit $c_{11}...c_{rr} \neq 0$. Diese Matrix hat den Spaltenrang r; denn ihre ersten r Spalten sind linear unabhängig. Jetzt haben wir die Antwort auf Frage 6 am Ende von Kap 1:

Die dort gefundene Zahl r ist der Spaltenrang der Matrix A und unabhängig von der Art, in der das Gaußverfahren durchgeführt wurde.

Übrigens hat die obige Matrix offenkundig auch den Zeilenrang r. Auch dieser ändert sich nicht bei den Manipulationen 1,2,3:

- $1.\$ und $2.\$ Da der Spaltenrang sich nicht ändert bei $1\$ und $2,\$ ändert sich der Zeilenrang nicht bei $2\$ und $1.\$
 - 3. Sind $z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(m)}$ die Zeilen der Matrix A, so sind $z^{(1)} + \lambda z^{(2)}, z^{(2)}, ..., z^{(m)}$ die Zeilen der modifizierten Matrix. Diese beiden m-Tupel spannen denselben Vektorraum auf.

Also hat A auch denselben Zeilenrang wie C. Es folgt

Zeilenrang = Spaltenrang

Man nennt diese gemeinsame Zahl den Rang der Matrix.

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme:

Im Matrizenkalkül schreibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit einer $\,(m\times n)\,\text{-Matrix}\,\,A\,,$ einem Vektor $\,b\in\mathbb{R}^m\,$ und gesuchtem $\,x\in\mathbb{R}^n\,.$

- 1. Das System ist lösbar dann und nur dann, wenn b sich aus den Spalten von A linear kombinieren läßt. Das bedeutet, daß A denselben Rang haben muß wie die Matrix, die aus A dadurch entsteht, daß man die Spalte b noch anfügt.
- 2. Die Spalten von A spannen das Bild der linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ vom \mathbb{R}^n in den \mathbb{R}^m auf. Die $x \in \mathbb{R}^n$ mit Ax = 0 bilden den Kern dieser Abbildung. Satz 5 besagt jetzt

Satz 6. Hat die Matrix A den Rang k, so besitzt das homogene lineare Gleichungssystem genau n-k linear unabhängige Lösungen.

Beispiel: Ist $A = (a_1 \ a_2 \ \ a_n)$ eine von 0 verschiedene Zeile, so hat die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

genau n-1 linear unabhängige Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$.

Spezialisierung auf quadratische Matrizen: Eine Matrix heißt quadratisch, wenn sie genau so viele Zeilen wie Spalten besitzt. Wenn V ein Vektorraum mit Basis $v_1, ..., v_n$ ist, dann wird durch

(1)
$$\phi(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$$

eine lineare Abbildung von V in sich erklärt. Eine solche nennt man einen Endomorphismus von V. Aus Satz 5 folgt für Endomorphismen ϕ

$$\phi$$
surjektiv $\Longleftrightarrow \phi$ injektiv

Angenommen, ϕ sei surjektiv. Dann spannen $\phi(v_1),...,\phi(v_n)$ den ganzen Vektorraum V auf. Insbesondere müssen $v_1,...,v_n$ sich aus ihnen linear kombinieren lassen: Es gibt b_{ij} mit

$$v_i = \sum_{j=1}^n b_{ji}\phi(v_j) = \sum_{j=1}^n b_{ji} \sum_{k=1}^n a_{kj}v_k = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{kj}b_{ji})v_k$$

Da die v_i linear unabhängig sind, folgt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf der linken Seiten stehen die Koeffizienten des Matrizenprodukts AB, auf der rechten Seite entsteht die Matrix, die auf der Diagonalen lauter Einsen hat und sonst Nullen. Diese heißt die (n-reihige) Einheitsmatrix

$$\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Also: wenn ϕ surjektiv, dann gibt es eine Matrix B mit

$$AB = \mathbf{1}_n$$

Rechnen wir andersrum:

$$\phi(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j = \sum_{j=1}^n a_{ji} \sum_{k=1}^n b_{kj} \phi(v_k) = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n b_{kj} a_{ji}) \phi(v_k)$$

Da, wie oben bemerkt, ϕ , falls surjektiv, auch injektiv ist, sind die $\phi(v_k)$ linear unabhängig (prüfe das nach!). Deshalb können wir hieraus schließen, daß

$$BA = \mathbf{1}_n$$

Definition: Eine Matrix A heißt invertierbar, wenn es eine Matrix B gibt, so daß

$$AB = BA = \mathbf{1}_n$$

Satz 7. Für eine n-reihige quadratische Matrix A sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- 1. A hat Rang n
- 2. Die Abbildung ϕ , die durch (1) beschrieben wird, ist injektiv. Insbesondere gilt das für die Abbildung $x \mapsto Ax$ des \mathbb{R}^n in sich. Das bedeutet: Ax = 0 besitzt nur die triviale Lösung x = 0
- 3. Die Abbildung ϕ in (1) ist surjektiv. Insbesondere gilt das für die Abbildung $x \mapsto Ax$ des \mathbb{R}^n in sich. Das bedeutet: die Gleichung Ax = b ist lösbar für jedes $b \in \mathbb{R}^n$.
- 4. Die Matrix A ist invertierbar

Beweis: Nach Satz 5 sind 2 und 3 äquivalent, und aus 3 haben wir 4 hergeleitet. Umgekehrt folgt aus $AB = \mathbf{1}_n$ sofort 3. Da der Rang von A gleich der Dimension des Bildes ist, ist auch 1 mit 3 äquivalent.

4. Determinanten

Aufgabe: Berechne den Flächeninhalt des von zwei Vektoren a und b in \mathbb{R}^2 aufgespannten Parallelogramms.

Die Gerade durch a und a+b hat die Parameterdarstellung

$$x = a + \lambda b$$

Sie trifft die Achse $x_2=0$ für $a_2+\lambda b_2=0$, also in $a'=\begin{pmatrix} a_1-\frac{a_2}{b_2}b_1\\0 \end{pmatrix}$ (wenn wir mal annehmen, daß $b_2\neq 0$). Das Parallelogramm 0,a,a+b,b hat denselben Flächeninhalt wie 0,a',a'+b,b, und dieser ist = Grundlinie mal Höhe $=(a_1-\frac{a_2}{b_2}b_1)b_2=a_1b_2-a_2b_1$.

Wir betrachten die Fläche des von zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms als reellwertige Funktion F(x,y). Man beachte allerdings, daß es sich bei $F(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1$ um den "orientierten Flächeninhalt" handelt: er nimmt ein Vorzeichen auf, wenn man x und y vertauscht. Er hat offenbar die folgenden Eigenschaften:

1.

$$F(x, y + z) = F(x, y) + F(x, z)$$

Zwei Parallelogramme mit gleicher Grundlinie werden aneinander gesetzt (und die entstehende Fläche begradigt)

2.

$$F(\lambda x, y) = \lambda F(x, y) = F(x, \lambda y)$$

Das Parallelogramm wird in einer Richtung aufgeblasen.

$$F(x,x) = 0$$

Zusammengeklapptes Parallelogramm

Nun sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n. Wir suchen eine reellwertige Funktion F von n Vektoren in V, also eine Abbildung

$$V \times \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

die die Eigenschaften 1,2,3 für $\,n\,$ statt 2 besitzt, also D1

$$F(x_1,...,x_i+y,...,x_n) = F(x_1,...,x_i,...,x_n) + F(x_1,...,y,...,x_n)$$
 für $x_1,...,x_n,y \in V$ und $i=1,...,n$

D2

$$F(x_1,...,\lambda x_i,...,x_n) = \lambda F(x_1,...,x_i,...,x_n)$$
 für $x_1,...,x_n \in V, \ \lambda \in \mathbb{R}$ und $i = 1,...,n$

D3 $F(x_1,...,x_n)=0$, wenn zwei der Vektoren x_i gleich sind ($x_i=x_j$ für ein Paar $i\neq j$)

Satz 8. Wenn $v_1,...,v_n$ eine Basis von V ist, dann gibt es genau eine Funktion F mit den Eigenschaften D1,D2,D3 und $F(v_1,...,v_n)=1$.

Um den Beweis von Satz 8 nicht an der entscheidenden Stelle zu unterbrechen, vorher ein kleiner Exkurs über Permutationen:

Definition: Eine bijektive Abbildung einer Menge auf sich heißt Permutation.

Die Permutationen einer Menge bilden bei Hintereinanderausführung eine Gruppe. Ist M eine Menge von n Objekten, so heißt diese Gruppe die symmetrische Gruppe auf n Objekten (n Ziffern) und wird mit S_n bezeichnet.

Definition: Eine Permutation, die zwei Ziffern $i \neq j$ vertauscht und alle übrigen Ziffern fest läßt, heißt Transposition.

Definition: Eine Permutation σ der Ziffern 1 bis n heißt gerade, wenn die Anzahl der "Fehlstände", d.h. die Anzahl der Paare i < j mit $\sigma(i) > \sigma(j)$, gerade ist, sonst ungerade.

Um zu rechnen, definieren wir

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

 $\epsilon(\sigma)$ heißt das Vorzeichen der Permutation σ . Es ist = 1, wenn σ gerade, und = -1, wenn σ ungerade ist. Entscheidend ist

Lemma 1. ϵ ist multiplikativ:

$$\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)$$
 für alle $\sigma, \tau \in S_n$

Beweis:

$$\begin{split} \epsilon(\sigma\tau) &= \prod_{i < j} \frac{\sigma\tau(i) - \sigma\tau(j)}{i - j} \\ &= \prod_{i < j} \frac{\sigma\tau(i) - \sigma\tau(j)}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \\ &= \epsilon(\tau) \cdot \prod_{i < j, \tau(i) < \tau(j)} \frac{\sigma\tau(i) - \sigma\tau(j)}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \prod_{i < j, \tau(i) > \tau(j)} \frac{\sigma\tau(i) - \sigma\tau(j)}{\tau(i) - \tau(j)} \end{split}$$

In dem letzten Produkt benennt man um: man schreibt i statt j und j statt i. Dadurch ändert sich der Wert des Bruches in dem Produkt nicht, und aus der Bedingung am Produkt wird $j < i, \tau(j) > \tau(i)$. Faßt man nun mit dem zweiten Produkt zusammen, so erhält man genau alle Paare i, j mit $\tau(i) < \tau(j)$. Da τ bijektiv ist, ist das Produkt der letzten beiden Faktoren also gerade $\epsilon(\sigma)$.

Lemma 2. Für jede Transposition τ ist $\epsilon(\tau) = -1$.

Beweis: τ sei die Transposition, die i und j vertauscht und alle andern Ziffern fest läßt. Man nehme eine Permutation σ mit $\sigma(i)=1$ und $\sigma(j)=2$. Dann ist $\sigma\tau\sigma^{-1}$ die Transposition, die 1 und 2 vertauscht. Für sie ist 1,2 das einzige Paar mit Fehlstand, ihr Vorzeichen ist also -1. Nach Lemma 1 ist $\epsilon(\tau)=\epsilon(\sigma\tau\sigma^{-1})$, also auch =-1.

Beweis von Satz 8:

Eindeutigkeit: Sei F eine Funktion mit D1,D2,D3 und $x_1,...,x_n$ Vektoren aus V. Da $v_1,...,v_n$ eine Basis bilden, lassen sich die x_i aus den v_j linear kombinieren:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ji}v_j, \quad i=1,....,n$$

$$F(x_1,....,x_n) = F(\sum_j x_{j1}v_j,.....,\sum_j x_{jn}v_j) =$$

$$\sum_{j_1,....,j_n=1}^n x_{j_11}....x_{j_nn}F(v_{j_1},.....,v_{j_n}) \quad \text{nach D1 und D2}$$

Nach D3 sind alle Summanden 0, in denen irgend zwei der Vektoren $v_{j_1},....,v_{j_n}$ gleich sind. Man muß also nur noch über solche n-Tupel $j_1,...,j_n$ summieren, in denen alle j_{ν} verschieden sind, d.h. die durch eine Permutation σ aus $\{1,2,...,n\}$ hervorgehen. Ferner folgt aus D3 mit einer kleinen Rechnung, die man Polarisieren nennt, daß F beim Vertauschen von zwei Vektoren ein Vorzeichen aufnimmt:

$$0 = F(..., x + y, ..., x + y, ...)$$
 nach D3
$$= F(..., x, ..., x, ...) + F(..., x, ..., y, ...) + F(..., y, ..., x, ...) + F(..., y, ..., y, ...)$$
 nach D1
$$= F(..., x, ..., y, ...) + F(..., y, ..., x, ...)$$
 nach D3

Jede Permutaion ist ein Produkt von Transpositionen, und aus Lemma 1 und 2 folgt nun

$$F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)F(v_1, \dots, v_n)$$

Trägt man dies oben ein, so erhält man

$$F(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdot ... \cdot x_{\sigma(n)n} F(v_1, ..., v_n)$$

Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen.

Existenz: Dazu definieren wir für $x_i = \sum_j x_{ji} v_j$

(1)
$$F(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma \in S} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdot ... \cdot x_{\sigma(n)n}$$

und zeigen, daß diese Funktion F tatsächlich D1,D2,D3 erfüllt:

D1 und D2: hält man n-1 der Vektoren $x_1, ..., x_n$ fest, so ist jeder Summand in der Summe in (1) eine lineare Funktion des nicht fest gehaltenen.

D3: $x_1, ..., x_n$ sei ein n-Tupel mit zwei gleichen Vektoren. Der Bequemlichkeit halber nehmen wir an, daß $x_1 = x_2$. Dann sei τ die Transposition, die 1 und 2 vertauscht und alle andern Ziffern fest läßt. Jetzt ist

$$F(x_1,...,x_n) = F(x_{\tau(1)},....,x_{\tau(n)})$$

und daraus folgt

$$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)\tau(1)} x_{\sigma(n)\tau(n)}$$

$$\begin{split} &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma\tau^{-1}(1)1}.....x_{\sigma\tau^{-1}(n)n} \text{ (indem man die Faktoren vertauscht)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma\tau) x_{\sigma(1)1}.....x_{\sigma(n)n} \quad \text{(mit σ durchläuft auch $\sigma\tau$ die S_n)} \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1}....x_{\sigma(n)n} \text{ nach Lemma 1 und 2} \end{split}$$

Das beweist, daß die Summe 0 ist, also $F(x_1,...,x_n)=0$.

Die Determinante einer Matrix: Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine quadratische Matrix. Definition:

(1)
$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n}$$

heißt die Determinante der Matrix A. Statt det A schreibt man auch die Einträge in senkrechten Strichen:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Die Formel (1) nennt man auch die Leibnizsche Formel für die Determinante. Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 8 kann so formuliert werden:

Satz 9. Für jede reellwertige Funktion F auf $V \times ... \times V$, jedes System $v_1, ..., v_n$ von n Vektoren aus V und jede $n \times n$ Matrix A gilt

$$F(\sum_{j=1}^{n} a_{j1}v_{j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{jn}v_{j}) = \det A \cdot F(v_{1}, \dots, v_{n})$$

Beweis: Satz 8 sagt, daß dies richtig ist, falls $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V bilden. Ist das nicht der Fall, so sind sie linear abhängig, und beide Seiten der Gleichung sind 0: Ist $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ und zum Beispiel $\lambda_1 \neq 0$, so ist

$$F(v_1, v_2, ..., v_n) = F(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2 - - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}v_n, v_2, ..., v_n) = \sum_{i=2}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}F(v_i, v_2,, v_n) = 0$$

Und sind $v_1, ..., v_n$ linear abhängig, so sind die Vektoren auf der linken Seite erst recht linear abhängig. Eigenschaften der Determinante:

0. Die Determinante der Einheitsmatrix ist 1Das folgt sofort aus der Formel von Leibniz.1.

 $\det A = \det A^t$

Dabei ist A^t die gestürzte Matrix, also die Matrix, die aus A durch Spiegeln an der Diagonalen entsteht:

$$(a^t)_{ij} = a_{ii}$$

Beweis:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

indem man in jedem Produkt die Faktoren vertauscht. Nun durchläuft mit σ auch σ^{-1} die S_n , und $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$. Also steht rechts die Determinante der gestürzten Matrix.

2. Für jedes i = 1, ..., n gilt: Die Determinante ist, wenn man alle Spalten bis auf die i-te festhält, eine lineare Funktion der i-ten Spalte.

Beweis: Für jede reellwertige Funktion F mit D1,D2,D3 und jede Basis $v_1,...,v_n$ von V gilt

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ \lambda a_{n1} + \mu b_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} F(v_1, \dots, v_n) =$$

$$F((\lambda a_{11} + \mu b_{11})v_1 + \dots + (\lambda a_{n1} + \mu b_{n1})v_n, \sum_{j=1}^n a_{j2}v_j, \dots \sum_{j=1}^n a_{jn}v_j)$$

$$= F(\lambda \sum_{j=1}^n a_{j1}v_j + \mu \sum_{j=1}^n b_{j1}v_j, \sum_{j=1}^n a_{j2}v_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}v_j)$$

$$= (\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}) F(v_1, \dots, v_n)$$

Dasselbe gilt wegen 1. für die Zeilen.

- 3. Die Determinante ist 0, wenn zwei Spalten (oder zwei Zeilen) übereinstimmen. Sie nimmt ein Vorzeichen auf, wenn man zwei Spalten (Zeilen) miteinander vertauscht (und die übrigen läßt, wo sie sind). Beweis: Das folgt unmittelbar aus D3 (und dem oben vorgeführten Polarisieren).
- 4. Die Determinante ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches einer Spalte (Zeile) zu einer anderen addiert. Beweis: Das folgt unmittelbar aus 2 und 3.
- 5. Der Determinantenmultiplikationssatz:

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Beweis: $e_1, ..., e_n$ sei die Standardbasis des \mathbb{R}^n . Für jede Funktion F mit D1,D2,D3 ist nach Satz 9

$$\det(AB) \ F(e_1, ..., e_n) = F(ABe_1, ..., ABe_n) = \det(A)F(Be_1, ..., Be_n) = \det(A)\det(B)F(e_1, ..., e_n)$$

6. Für eine Matrix C mit $c_{i1}=c_{1i}=0$ für alle i, etwa $C=\begin{pmatrix}c_{11}&0\\0&B\end{pmatrix}$ ist

$$\det(C) = c_{11} \det(B)$$

Beweis: In der Leibnizschen Formel (1) muß nur über diejenigen Permutationen σ summiert werden, für die $\sigma(1)=1$. Es bleibt c_{11} mal Summe über alle Permutationen der n-1 Ziffern 2,...,n, und letzteres ist die Determinante von B.

7. Entwicklung nach der i-ten Spalte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{nach } 2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{1n} & & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{nach } 4$$

Durch i-1 Spaltenvertauschungen bringt man die i-te Spalte an die erste Stelle und danach durch j-1Zeilenvertauschungen die j-te Zeile an die erste Stelle. Dadurch erhält man

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{ji} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

wo A_{ji} diejenige Matrix ist, die aus A durch Streichen j-ten Zeile und der i-ten Spalte entsteht. Nach 6 erhält man

(1)
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} |A_{ji}| \quad \text{für } i = 1,, n$$

Dies nennt man die Entwicklung der Determinante nach der i-ten Spalte. Völlig analog funktioniert die Entwicklung nach den Zeilen: Man hat dieselben Summanden zu summieren, nur nicht über j sondern über i .

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

Im Anschluß an 7 bemerken wir: Wenn $k \neq i$, dann ist

(2)
$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{jk} |A_{ji}|$$

die Entwicklung der Determinante nach der i-ten Spalte für eine Matrix mit zwei gleichen Spalten; denn nach Streichen der i-ten Spalte ist ja die k-te noch vorhanden. Also kommt 0 heraus.

Man setzt

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

Definition: Die Matrix \tilde{A} mit den Einträgen \tilde{a}_{ij} heißt die Adjunkte von A. Die Gleichungen (1) und (2) zusammen besagen

$$\tilde{A} \cdot A = |A| \cdot \mathbf{1}_n$$

Entwickelt man die Determinante nach der i-ten Zeile, so erhält man statt (1)

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_{ji}$$

also

$$A \cdot \tilde{A} = |A| \cdot \mathbf{1}_n$$

Nun folgt sofort:

Satz 10. Eine quadratische Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn ihre Determinante nicht 0 ist.

Beweis: Nach Definition ist A invertierbar, wenn es B gibt mit $AB = BA = \mathbf{1}$. Ist das der Fall, so ist $|A| \cdot |B| = |AB|$ (nach 5) = $|\mathbf{1}| = 1$, also sicher $|A| \neq 0$. Ist umgekehrt $|A| \neq 0$, so erfüllt $B := |A|^{-1} \cdot \tilde{A}$ die Gleichungen $AB = BA = \mathbf{1}$.

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme mit gleich vielen Gleichungen wie Unbekannten: Sei

$$Ax = b$$

ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen für n Unbekannte. Man multipliziert mit der Adjunkten von A:

$$|A|x = \tilde{A}b$$

Die Einträge von $\tilde{A}b$ sind

$$(\tilde{A}b)_i = \sum_j \tilde{a}_{ij}b_j = \sum_j (-1)^{i+j}|A_{ji}|\ b_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & b_n & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

wobei die b_j in der i-ten Spalte eingetragen sind. Man erhält also im Falle $|A| \neq 0$ die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & & b_n & & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Cramersche Regel

5. Symmetrische Bilenearformen

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine lineare Abbildung von V nach \mathbb{R} hatten wir auch Linearform genannt. Definition: Eine Bilinearform auf V ist eine Abbildung F von $V \times V$ nach \mathbb{R} , für die F(x,y) bei festem y linear in x und bei festem x linear in y ist. F heißt symmetrisch, wenn

$$F(x,y) = F(y,x)$$

für alle x, y. Für eine symmetrische Bilinearform ist also zum Beispiel

$$F(x + y, x + y) = F(x, x) + 2F(x, y) + F(y, y)$$

Beispiele:

1. V = Vektorraum aller stetigen reellwertigen Funktionen auf [-1,1] und

$$F(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

für $f,g \in V$.

2. $V = \mathbb{C}$, aufgefaßt als zweidimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} , und

$$F(z,w) = \frac{1}{2}(z\bar{w} + \bar{z}w)$$

3. Standardbeispiel: $V = \mathbb{R}^n$ und

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y = y^t x \text{ für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Sei $v_1, ..., v_n$ eine Basis des Vektorraumes V und F eine symmetrische Bilinearform auf V. Für die reellen Zahlen $a_{ij} := F(v_i, v_j)$ gilt dann $a_{ij} = a_{ji}$, die von ihnen gebildete Matrix erfüllt also

$$A = A^t$$

Eine solche Matrix nennt man symmetrisch. Die Matrix A bestimmt die Bilinearform F vollständig; denn für $x = \sum_i x_i v_i$ und $y = \sum_i y_i v_i$ ist

$$F(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$$

Wenn $V = \mathbb{R}^n$ und man die Standardbasis $e_1, ..., e_n$ nimmt, dann gilt mit $a_{ij} = F(e_i, e_j)$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

und y entsprechend

$$F(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = (x_1, ..., x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^t A y$$

Also: Eine symmetrische Bilinearform auf dem \mathbb{R}^n ist eine reellwertige Funktion der Gestalt

$$F(x,y) = x^t A y$$

Lemma 1. Sei F eine symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum V. Dann gibt es eine Basis $v_1, ..., v_n$ von V mit

$$F(v_i, v_j) = 0$$
 für alle $i \neq j$

Beweis: Wenn F=0, ist nichts zu zeigen. Wenn $F\neq 0$, dann gibt es ein Paar von Vektoren x,y mit $F(x,y)\neq 0$. Dann ist wenigstens einer der drei Werte F(x,x), F(y,y) und F(x+y,x+y) nicht 0. D.h. es gibt $v_1\in V$ mit $F(v_1,v_1)\neq 0$. Jedes $x\in V$ läßt sich zerlegen in

(1)
$$x = \frac{F(x, v_1)}{F(v_1, v_1)} v_1 + z$$

wobei der Vektor z durch diese Gleichung definiert ist. Nach Konstruktion liegt er in

$$v_1^{\perp} := \{ y \in V \mid F(v_1, y) = 0 \}$$

 v_1^{\perp} ist der Kern der (surjektiven !) linearen Abbildung $x\mapsto F(x,v_1)$ von V nach \mathbb{R} . Aus der Dimensionsformel für Kern und Bild folgt

$$\dim v_1^{\perp} = n - 1$$

Nach Induktionsannahme besitzt v_1^{\perp} eine Basis $v_2,...,v_n$ mit $F(v_i,v_j)=0$ für $i\neq j$. Nach (1) bilden $v_1,...,v_n$ eine Basis von V der gewünschten Art.

Zusatz: Ist $F(v_1, v_1) = \alpha$ und $\alpha > 0$, so kann man aus α eine reelle Quadratwurzel ziehen: $\alpha = \beta^2$. Dann ist $F(\frac{1}{\beta}v_1, \frac{1}{\beta}v_1) = 1$. Ist $\alpha < 0$, so hat man β mit $\beta^2 = -\alpha$, und dann ist $F(\frac{1}{\beta}v_1, \frac{1}{\beta}v_1) = -1$. Man kann also eine Basis von V finden, für die

$$F(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i \neq j \\ 1, -1 \text{ oder } 0 & \text{wenn } i = j \end{cases}$$

Behauptung: Die Anzahl der Nullen, Einsen und Minuseinsen unter den $F(v_i, v_i)$ ist nur von F und nicht von der gewählten Basis abhängig.

Beweis: Seien $v_1,...,v_n$ und $w_1,...,w_n$ zwei Basen mit

(1)
$$F(v_i, v_j) = F(w_i, w_j) = 0 \text{ für } i \neq j \text{ und}$$

(2)
$$F(v_i, v_i) = 1$$
 für $1 \le i \le p$, $F(v_i, v_i) = -1$ für $p + 1 \le i \le p + q$ und $F(v_i, v_j) = 0$ für $p + q + 1 \le i \le n$

analog für die w_i mit Anzahlen r, s statt p, q. Wir zeigen, daß $v_1, ..., v_p, w_{r+1},, w_n$ linear unabhängig sind: eine lineare Relation zwischen ihnen schreiben wir in der Gestalt

(1)
$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = \mu_1 w_{r+1} + \dots + \mu_s w_{r+s} + \dots + \mu_{n-r} w_n$$

Auf beiden Seiten berechnen wir F(-,-):

$$\lambda_1^2 + \dots + \lambda_p^2 = -(\mu_1^2 + \dots + \mu_s^2)$$

Da reelle Quadrate ≥ 0 sind, folgt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0$$

Dann bleibt von (1) nur noch übrig $\mu_{s+1}w_{r+s+1} + ... + \mu_{n-r}w_n = 0$. Da die w_i zu einer Basis gehören, müssen auch $\mu_{s+1} = ... = \mu_{n-r} = 0$ sein.

Damit ist die lineare Unabhängigkeit von $v_1, ..., v_p, w_{r+1}, ..., w_n$ bewiesen. Die Anzahl dieser Vektoren ist also höchstens n:

$$p + (n - r) \le n$$
, also $p \le r$

Aus Symmetriegründen ist genaus
o $r \leq p$, also r = p. Die Vektoren $v_{p+q+1},...,v_n$ bilden eine Basis des Unterraumes

$$R:=\{x\in V\mid F(x,y)=0\text{ für alle }y\in V\}$$

(man prüfe das !), und dasselbe tun $w_{r+s+1},...,w_n$. Also ist p+q=r+s und damit auch q=s.

Das eben Bewiesene übersetzen wir in Matrizensprache und formulieren es als

Satz 11. (Sylvesterscher Trägheitssatz) Zu jeder reellen symmetrischen Matrix A gibt es eine invertierbare Matrix T mit

(3)
$$T^t A T = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_p & & \\ & -\mathbf{1}_q & \\ & \mathbf{0}_{n-p-q} \end{pmatrix}$$

Die Zahlen p und q sind von T unabhängig, sie hängen nur von A ab.

Beweis: Mit $V = \mathbb{R}^n$ und $F(x,y) = x^t A y$ benutzen wir das oben Bewiesene: Es gibt eine Basis $v_1,..,v_n$ des \mathbb{R}^n mit (1) und (2). Sei

$$v_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} e_j = \begin{pmatrix} t_{1i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{pmatrix}$$

Die Gleichungen (1) und (2) sagen, daß die Matrix der $F(v_i, v_j)$ die in (3) gewünschte Gestalt besitzt. Und

$$F(v_i, v_j) = F(\sum_k t_{ki} e_k, \sum_l t_{lj} e_l) = \sum_{kl} t_{ki} F(e_k, e_l) t_{lj} = \sum_{kl} t_{ki} a_{kl} t_{lj}$$

Dies ist der Eintrag Nr. (i, j) der Matrix T^tAT , wenn T die Matrix mit den Einträgen t_{ij} ist. T ist invertierbar, weil $v_1, ..., v_n$ wieder eine Basis bilden.

Besonderer Fall:

Definition: Eine reelle symmetrische Matrix A heißt positiv definit, wenn

$$x^t Ax > 0$$
 für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Für jede invertierbare Matrix T ist T^tT positiv definit; denn $x^tT^tTx = (Tx)^tTx = y^ty = \sum_i y_i^2$ mit y = Tx. Da T invertierbar, ist $y \neq 0$, wenn $x \neq 0$. Umgekehrt sei A positiv definit. Dann ist auch T^tAT positiv definit für jedes invertierbare T. Eine Matrix der Gestalt (3) kann aber nur positiv definit sein, wenn p = n.

Ein für später nützliches Kriterium, um "positiv definit" zu erkennen, ist

Satz 12. Die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist positiv definit genau dann, wenn alle ihre n Hauptunterdeterminanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \text{ sind} \quad (i = 1, ..., n).$$

Beweis: " \Rightarrow ": Mit A sind auch alle Untermatrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & & a_{ii} \end{pmatrix}$ positiv definit (man lasse in den

Testvektoren die letzten n-i Komponenten weg). Also muß nur gezeigt werden, daß jede positiv definite Matrix positive Determinante hat. Das folgt daraus, daß sie die Form T^tT hat und $|T^tT| = |T|^2 > 0$. " \Leftarrow ": Man schreibt

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ u^t & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}, \ u \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ und } B = B_{n-1,n-1} = B^t$$

Man entwickelt |A| nach der letzten Spalte:

$$|A| = \alpha |B| + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} u_i |A_{in}|$$

Die $|A_{in}|$ entwickelt man nach der n-ten Zeile. Nach Streichen der n-ten Zeile und der j-ten Spalte bleibt von A_{in} die Matrix B_{ij} übrig. Nach Definition der Adjunkten \tilde{B} erhält man

$$|A| = \alpha |B| + \sum_{i,j=1}^{n-1} (-1)^{i+n} u_i (-1)^{n-1+j} u_j |B_{ij}| = \alpha |B| - \sum_{i,j=1}^{n-1} u_j \tilde{b}_{ji} u_i$$

$$= \alpha |B| - u^t \tilde{B} u$$

Weil $|B| \neq 0$, ist $\tilde{B} = |B|B^{-1}$ und

$$|A| = |B|(\alpha - u^t B^{-1}u)$$

Da |A| > 0 und |B| > 0, ist

$$\alpha > u^t B^{-1} u$$

Nun testen wir, ob A positiv definit: Dazu schreiben wir einen beliebigen Vektor x des \mathbb{R}^n als $x = \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix}$ mit $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ und reellem λ .

$$x^{t}Ax = (y^{t}, \lambda) \begin{pmatrix} B & u \\ u^{t} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \lambda \end{pmatrix} = y^{t}By + 2\lambda u^{t}y + \lambda^{2}\alpha$$

$$= y^{t}By + 2\lambda u^{t}y + \lambda^{2}u^{t}B^{-1}u + \lambda^{2}(\alpha - u^{t}B^{-1}u) = (y + \lambda B^{-1}u)^{t}B(y + \lambda B^{-1}u) + \lambda^{2}(\alpha - u^{t}B^{-1}u)$$

Nach Induktionsannahme ist B positiv definit. Der linke Summand ist also >0 außer wenn $y+\lambda B^{-1}u=0$. Der rechte Summand ist nach (1) positiv außer wenn $\lambda=0$. Es folgt, daß die Summe nur 0 sein kann, wenn $\lambda=0$ und $y+\lambda B^{-1}u=0$, also wenn x=0 ist.

Das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren: Wir sahen, daß jede positiv definite Matrix A von der Gestalt T^tT mit invertierbarem T ist. Das jetzt zu beschreibende Verfahren zeigt, daß man T sogar dreieckig und mit positiven Diagonalelementen wählen kann:

Gegeben sei ein reeller Vektorraum V mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform F und einer Basis $v_1, ..., v_n$. Zur Abkürzung schreiben wir einfach F(x, y) = (x, y) und $\sqrt{F(x, x)} = |x|$. Wir setzen

$$e_1 = \frac{1}{|v_1|} \, v_1$$

Sodann wählen wir λ so, daß für den Vektor

$$v_2^* := v_2 - \lambda e_1$$
 gilt $(v_2^*, e_1) = 0$, also $\lambda = (v_2, e_1)$

und setzen

$$e_2 = \frac{1}{|v_2^*|} \, v_2^*$$

Sodann wählen wir λ_1,λ_2 so, daß für den Vektor

$$v_3^* := v_3 - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 \text{ gilt } (v_3^*, e_1) = (v_3^*, e_2) = 0, \text{ also } \lambda_1 = (v_3, e_1), \ \lambda_2 = (v_3, e_2)$$

und setzen

$$e_3 = \frac{1}{|v_3^*|} \, v_3^*$$

Haben wir schon $e_1, ..., e_k$ mit $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, so setzen wir

$$v_{k+1}^* = v_{k+1} - (v_{k+1}, e_1)e_1 - \dots - (v_{k+1}, e_k)e_k$$
 und $e_{k+1} = \frac{1}{|v_{k+1}^*|}v_{k+1}^*$

Auf diese Weise erhalten wir ein Orthonormalsystem $e_1, ..., e_n$, und

$$\begin{array}{rclcrcl} e_1 & = & t_{11}v_1 \\ e_2 & = & t_{12}v_1 & + & t_{22}v_2 \\ \vdots & & & & \\ e_n & = & t_{1n}v_1 & + & \dots & + & t_{nn}v_n \end{array}$$

mit den aus dem Verfahren zu entnehmenden t_{ij} , wobei $t_{ii} = \frac{1}{|v_i^*|} > 0$. Für die Matrix A mit $a_{ij} = (v_i, v_j)$ bedeutet das

$$\delta_{ij} = (e_i, e_j) = (\sum_r t_{ri} v_r, \sum_s t_{sj} v_s) = \sum_{r,s} t_{ri} a_{rs} t_{sj}, \text{ also } T^t A T = \mathbf{1}$$

Die Matrix $S = T^{-1}$ ist ebenfalls dreieckig mit positiver Diagonale, und für sie gilt $A = S^t S$.

Anwendung: Sei X eine beliebige invertierbare Matrix. Dann ist X^tX positiv definit, und wir haben eine Dreiecksmatrix B mit positiver Diagonale und $X^tX = B^tB$. Die Matrix $K := XB^{-1}$ erfüllt

$$K^{t}K == (B^{t})^{-1}X^{t}XB^{-1} = (B^{t})^{-1} \cdot B^{t}B \cdot B^{-1} = \mathbf{1}$$

Eine Matrix K mit $K^tK = 1$ heißt orthogonal (Genaueres im nächsten Kap). Mit

$$X = KB$$

haben wir:

Jede invertierbare Matrix ist Produkt einer orthogonalen Matrix mit einer Dreiecksmatrix mit positiver Diagonale. Diese Darstellung ist eindeutig (Aufgabe 21)

Iwasawa-Zerlegung

6. Der Euklidische \mathbb{R}^n

Im \mathbb{R}^n nimmt man die positiv definite Standardbilinearform, die man einfach mit (x,y) bezeichnet:

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y^t x$$

Definition: (x,y) heißt das skalare Produnkt von x und y. Die Vektoren x und y heißen senkrecht aufeinander, wenn (x,y)=0.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y),$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis: Wenn x=0, ist die Behauptung trivial. Wenn $x\neq 0$ und x und y linear abhängig sind, dann ist $y=\lambda x$ für ein reelles λ , und oben gilt das Gleichheitszeichen. Seien nun x und y linear unabhängig. Dann ist $\lambda x+y\neq 0$ für alle λ , und

$$0 < (\lambda x + y, \lambda x + y) = (x, x)\lambda^{2} + 2(x, y)\lambda + (y, y) = (x, x)(\lambda + \frac{(x, y)}{(x, x)})^{2} - \frac{(x, y)^{2}}{(x, x)} + (y, y)$$

für alle λ . Setzt man speziell $\lambda = -\frac{(x,y)}{(x,x)}$, so folgt die Behauptung.

Nach Pythagoras ist $\sum_{i=1}^n x_i^2$ das Quadrat der Entfernung von $x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}$ bis zum Nullpunkt.

Definition: Die positive Wurzel aus (x,x) heißt die (euklidische) Norm |x| von x:

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Wenn (x,y)=0, dann ist $|x|^2+|y|^2=|x+y|^2$ (Pythagoras). Nach Cauchy-Schwarz ist

$$|(x,y)| \le |x||y|$$

Sind x und y beide $\neq 0$, so folgt daraus

$$-1 \le \frac{(x,y)}{|x||y|} \le 1$$

Nach Analysis I gibt es genau einen Winkel α mit

$$0 \le \alpha \le \pi \text{ und } \cos \alpha = \frac{(x,y)}{|x||y|}$$

 α heißt der Winkel zwischen x und y . Wichtig ist die

Dreiecksungleichung:
$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Beweis: Da auf beiden Seiten positive Zahlen stehen, genügt es, die Quadrate zu vergleichen:

$$|x+y|^2 = (x+y,x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le |x|^2 + 2|x| \, |y| + |y|^2 (\text{ Cauchy-Schwarz }) = (|x|+|y|)^2 + (|x|+|y|)^2 +$$

Das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 : Definition:

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

heißt das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) von x und y. Es hat (u.a.) folgende Eigenschaften:

- 1. $x \times y = 0$ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind (vgl. Kap 2)
- 2. $(x, y \times z) = \det(x, y, z)$ Beweis: Entwickle die Determinante $\det(x, y, z)$ nach der ersten Spalte. Insbesondere stehen x und y auf $x \times y$ senkrecht. Ferner folgt

$$\det(x, y, x \times y) = \det(x \times y, x, y) = (x \times y, x \times y) > 0$$
, falls x und y linear unabhängig

Definition: n linear unabhängige Vektoren $x_1, ..., x_n$ im \mathbb{R}^n bilden ein Rechtssystem, wenn die Determinante mit den Spalten $x_1, ..., x_n$ positiv ist.

Sind x und y linear unabhängig, so bilden die Vektoren x,y und $x\times y$ ein Rechtssystem im \mathbb{R}^3 .

3.
$$x \times (y \times z) = (x, z)y - (x, y)z$$

Beweis: Wenn z und y linear abhängig sind, sind beide Seiten der Gleichung 0. Sonst: Der Vektor auf der linken Seite steht auf $y \times z$ senkrecht und ist daher eine Linearkombination von y und z. Da er außerdem auf x senkrecht steht, ist er ein Vielfaches von (x,z)y-(x,y)z. Teste eine Komponente, um zu sehen, daß der Proportionalitätsfaktor 1 ist.

4.
$$(x \times y, u \times v) = (x, u)(y, v) - (x, v)(y, u)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (x\times y, u\times v) &= \det(x\times y, u, v) \text{ (nach 2.) } = \det(v, x\times y, u) = (v, (x\times y)\times u) \\ &= (v, (x, u)y - (y, u)x) \text{ (nach 3.) } = (x, u)(y, v) - (x, v)(y, u) \end{aligned}$$

Speziell ist

$$|x \times y|^2 = (x, x)(y, y) - (x, y)^2 = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, y) \\ (x, y) & (y, y) \end{vmatrix}$$

Gramsche Formel für
$$n=3$$
 und $p=2$

Diese Formel erlaubt noch einen anderen Ausdruck für das Vektorprodukt:

$$|x \times y|^2 = |x|^2 |y|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = (|x| |y| \sin \alpha)^2$$

wobei α der Winkel zwischen x und y ist. Da dieser verabredungsgemäß zwischen 0 und π liegt, ist sein Sinus nicht negativ, und wir erhalten

$$|x \times y| = |x| |y| \sin \alpha$$

Man kann das Vektorprodukt von zwei linear unabhängigen Vektoren x und y also auch so kennzeichnen:

- 1. $x \times y$ hat die Norm $|x| |y| \sin \alpha$
- 2. $x \times y$ steht senkrecht auf x und auf y
- 3. x, y und $x \times y$ bilden ein Rechtssystem.

Orthogonale Transformationen im \mathbb{R}^n und Drehungen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 :

Definition: Die $(n \times n)$ -Matrix T heißt orthogonal, wenn

(O)
$$(Tx, Ty) = (x, y)$$
 für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

Die Abbildung $x \mapsto Tx$ heißt in diesem Falle eine orthogonale Transformation.

Definition: Ein System (eine Basis) aus paarweise senkrechten Vektoren der Norm 1 heißt ein Orthonormalsystem (eine Orthonormalbasis).

Offenbar ist die Standardbasis des \mathbb{R}^n eine Orthonormalbasis.

Benutzt man (O) nur für die Basisvektoren e_i , so sieht man, daß die Spalten der Matrix T (das sind die Bilder der e_i) wieder eine Orthonormalbasis bilden. Diese Aussage kann man zusammenfassen in der Formel

$$(1) T^t T = \mathbf{1}$$

Ist umgekehrt $T^{t}T = 1$, so ist natürlich

$$(Tx, Ty) = (Tx)^t Ty = x^t T^t Ty = x^t y = (x, y)$$
 für alle x, y

Eine Matrix T ist also genau dann orthogonal, wenn $T^tT=\mathbf{1}$. Für orthogonale Matrizen ist $|T|^2=|T^tT|=1$. Die n-reihigen orthogonalen Matrizen bilden eine Gruppe, die sogenannte orthogonale Gruppe, die mit $O(n,\mathbb{R})$ bezeichnet wird. Die Matrizen mit Determinante 1 bilden darin eine Untergruppe, diese heißt die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n,\mathbb{R})$. Für n=2 und 3 sagen wir auch einfach Drehgruppe.

Dreh
gruppe im \mathbb{R}^2 : Die Drehung der Ebene um den Winke
l α wird bewirkt durch

$$\begin{pmatrix}
\cos \alpha & -\sin \alpha \\
\sin \alpha & \cos \alpha
\end{pmatrix}$$

Die Matrizen

$$\begin{pmatrix}
\cos \alpha & \sin \alpha \\
\sin \alpha & -\cos \alpha
\end{pmatrix}$$

haben Determinante -1 und bewirken Spiegelungen der Ebene (an welcher Geraden?)

Drehgruppe im \mathbb{R}^3 : Sei $T^tT = \mathbf{1}$ und |T| = 1. Dann ist

$$|\mathbf{1} - T| = |T^t T - T| = |T - \mathbf{1}| |T| = -|\mathbf{1} - T|$$

weil |T|=1 und 3 ungerade. Daher ist die Determinante von $\mathbf{1}-T$ gleich 0, und $\mathbf{1}-T$ ist nicht invertierbar. Das bedeutet nach Kap 3, daß es einen Vektor $a\neq 0$ gibt mit Ta=a. Ist $T\neq \mathbf{1}$, so ist a bis auf Vielfache der einzige Vektor, der fest bleibt. Wir normieren ihn auf |a|=1. Die von ihm aufgespannte Gerade heißt die Drehachse. Da T orthogonal ist, wird die zu a senkrechte Ebene bei T in sich transformiert. Sei

 $x \neq 0$ irgendein Vektor in dieser Ebene. Dann wird die Ebene aufgespannt von x und $a \times x$. Wenn T eine Drehung um den Winkel α bewirkt, so ist

(3)
$$Tx = x \cos \alpha + (a \times x) \sin \alpha \quad (\text{vgl. } (2))$$

Einen beliebigen Vektor $\,x\in\mathbb{R}^3\,$ zerlegen wir (erinnere $\,|a|=1\,)\,$

$$x = (x, a)a + [x - (x, a)a]$$

wobei der zweite Summand auf a senkrecht steht. Dann ist nach (3) und wegen Ta = a

$$Tx = (x, a)a + [x - (x, a)a]\cos\alpha + (a \times x)\sin\alpha = (1 - \cos\alpha)(x, a)a + x\cos\alpha + (a \times x)\sin\alpha$$

 $x, a \times x$ und a bilden ein Rechtssystem. Ersetzt man a durch -a (was die einzige Möglichkeit ist), so muß man α durch $-\alpha$ ersetzen. Wenn man die Matrix A hinschreibt, welche die Kreuzmultiplikation mit a bewirkt ($Ax = a \times x$), so kann man T als Matrix hinschreiben. Man tue das und lese rückwärts aus der Matrix T den Drehwinkel ab.

Anmerkung: Da Drehungen das Skalarprodukt und damit Längen und Winkel erhalten, und da sie außerdem die Orientierung erhalten, folgt aus der oben gegebenen Kennzeichnung des Vektorprodukts durch Richtung, Länge und Orientierung, daß für jede Drehung und für je zwei Vektoren a und b gilt

$$T(a \times b) = T(a) \times T(b)$$

Die Norm im \mathbb{R}^n gibt Anlass zu Begriffen wie Konvergenz, offen, abgeschlossen, stetig. Dabei ist es unerheblich, ob man die euklidische Norm $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ benutzt oder eine andere, zum Beispiel die Maximumnorm

$$|x|_{\infty} := \max_{1 \le i \le n} |x_i| \text{ für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sie muß nur die Bedingungen

N1 $|x| \ge 0$ für alle x und = 0 nur für x = 0

N2 $|\lambda x| = |\lambda| |x|$ für reelle λ

N3 $|x+y| \le |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

erfüllen. Man kann zeigen, daß auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum je zwei Normen $| \ |_1$ und $| \ |_2$ (d.h. reellwertige Funktionen mit N1,N2,N3) äquivalent sind in dem Sinne, daß es reelle Zahlen a,b>0 gibt mit

$$a|x|_1 \le |x|_2 \le b|x|_1$$
 für alle x

Zum Beispiel ist im \mathbb{R}^n

$$|x|_{\infty} \le |x| \le \sqrt{n} |x|_{\infty}$$

Völlig analog zu Analysis I ist

Definition 1. Eine Folge $(a^{(k)})_k$ von Vektoren im \mathbb{R}^n heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $N(\epsilon)$ gibt so, daß

$$|a^{(k)} - a^{(l)}| < \epsilon$$
 für alle $k, l > N(\epsilon)$

Definition 2. $a \in \mathbb{R}^n$ heißt Grenzwert der Folge $(a^{(k)})_k$ (die Folge konvergiert gegen a), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $N(\epsilon)$ gibt so, daß

$$|a^{(k)} - a| < \epsilon \text{ für alle } k > N(\epsilon),$$

Bezeichnung

$$a = \lim_{k \to \infty} a^{(k)}$$

Es bedeutet, daß die reelle Zahlenfolge $|a^{(k)} - a|$ eine Nullfolge (Analysis I) ist.

Aus

$$|x|_{\infty} \le |x| \le \sqrt{n} |x|_{\infty}$$

folgt, daß eine Folge von Vektoren im \mathbb{R}^n genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn alle n Komponentenfolgen Cauchyfolgen sind. Aus der Vollständigkeit von \mathbb{R} (Analysis I) folgt die

Vollständigkeit des \mathbb{R}^n : Jede Cauchyfolge im \mathbb{R}^n konvergiert (besitzt einen Grenzwert).

Definition 3. Für $a \in \mathbb{R}^n$ und reelles r > 0 heißt

$$K_r(a) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r \}$$

die offene Kugel vom Radius r um a.

Definition 4. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn sie zu jedem $a \in U$ noch eine offene Kugel $K_r(a)$ enthält.

Definition 5. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $A' := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$ offen ist.

Zu einer beliebigen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert man

$$\bar{A} = \{b \in \mathbb{R}^n \mid \text{ für jede offene Kugel } K_r(b) \text{ ist } K_r(b) \cap A \neq \emptyset\}$$

Lemma 1. \bar{A} ist abgeschlossen.

Beweis: Nach Definition 5 ist zu zeigen, daß das Komplement von \bar{A} offen ist. Sei also $b \notin \bar{A}$. Das bedeutet, es gibt r > 0 mit $K_r(b) \cap A = \emptyset$.

Angenommen nun, $K_r(b)$ enthielte ein Element c aus \bar{A} . Dann ist |c-b| < r, also $\epsilon := r - |c-b| > 0$. Nach Definition von \bar{A} gibt es in $K_\epsilon(c)$ ein Element aus A. Dieses liegt in $K_r(b) \cap A$, Widerspruch.

Lemma 2. Jede abgeschlossene Menge $B \supset A$ enthält \bar{A} .

Beweis: Angenommen, $x \in \bar{A}$ aber $x \notin B$. Das Komplement von B ist offen und enthält nach Definition 4 eine offene Kugel $K_r(x)$. Aber jede offene Kugel um x trifft A. In ihr gäbe es also Elemente, die zu A aber nicht zu B gehören, Widerspruch.

Folgerung 1. \bar{A} ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Oder auch: der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

Folgerung 2. A ist abgeschlossen genau dann, wenn $A = \bar{A}$.

Definition: \bar{A} heißt die abgeschlossene Hülle von A.

Lemma 3. $b \in \bar{A}$ genau dann, wenn es eine Folge $(a^k)_k$ von Vektoren $a^{(k)}$ aus A gibt mit

$$\lim_{k \to \infty} a^{(k)} = b$$

Beweis: $b \in \bar{A} \Rightarrow$ es gibt $a^{(1)} \in A \cap K_1(b), \ a^{(2)} \in A \cap K_{\frac{1}{2}}(b), \dots$. Offenbar ist $\lim_{k \to \infty} a^{(k)} = b$. Umgekehrt: Ist b Grenzwert einer Folge von Vektoren aus A, so liegen natürlich in jeder offenen Kugel um b Punkte aus A.

Satz 13. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Cauchyfolge von Vektoren aus A der (im \mathbb{R}^n vorhandene) Grenzwert zu A gehört.

Beweis: " \Rightarrow ": Sei $a = \lim a^{(k)}$ und alle $a^{(k)} \in A$. Wäre $a \notin A$, so gäbe es nach Definition (A' ist offen) eine offene Kugel $K_{\epsilon}(a)$, die A nicht trifft. Zu ϵ gibt es aber $N(\epsilon)$ so, daß alle $a^{(k)}$ mit $k > N(\epsilon)$ in $K_{\epsilon}(A)$ liegen. Widerspruch.

" \Leftarrow ": Zu zeigen ist, daß A' offen ist. Wäre A' nicht offen, so gäbe es einen Punkt $b \in A'$ derart, daß keine offene Kugel um b in A' liegt. Also: in $K_1(b)$ gibt es $x_1 \not\in A'$, d.h. $x_1 \in A$. In $K_{\frac{1}{2}}(b)$ gibt es $x_2 \in A$ usw.: in jedem $K_{\frac{1}{m}}(b)$ gibt es $x_m \in A$. Nach Konstruktion ($|x_m - b| < \frac{1}{m}$) konvergiert die Folge der $x_m \in A$ gegen $b \not\in A$, Widerspruch.

Es sei kurz an den Begriff der stetigen Funktion erinnert;

Definition: Eine auf einer offenen Teilmene $U \subset \mathbb{R}^n$ definierte Abbildung f in den \mathbb{R}^m heißt stetig im Punkte $a \in U$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$
 für alle $x \in U$ mit $|x - a| < \delta$

Dies bedeutet nach Definition von " $\lim_{x\to a}$ " dasselbe wie

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Man überlege sich: f ist genau dann stetig im Punkte a, wenn für JEDE Folge $x_k \to a$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(a)$$

Später sehr oft vorkommen wird der Begriff "kompakt". Wir begnügen uns mit: Eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n ist eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge.

Satz 14. Auf einer kompakten Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ besitzt jede Folge eine in B konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots$ eine Folge in B. Die Folge der ersten Koordinaten dieser Vektoren ist eine beschränkte Folge reeller Zahlen und besitzt nach Bolzano-Weierstraß (Analysis I) eine konvergente Teilfolge. Dann betrachten wir nur noch die Vektoren der Folge, die zu den dabei ausgewählten Indices gehören. In dieser wählen wir eine Teilfolge, für die die Folge der zweiten Koordinaten konvergiert usw. So erhalten wir eine Teilfolge in B, für die alle Koordinatenfolgen konvergieren. Dann konvergiert auch diese Teilfolge selbst, a priori in \mathbb{R}^n . Da B abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert nach Satz 11 in B.

Satz 15. Das Bild einer kompakten Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ unter einer stetigen Abbildung in einen \mathbb{R}^m ist kompakt.

Beweis: Zu zeigen ist, daß das Bild beschränkt und abgeschlossen ist.

- 1. Angenommen, es wäre nicht beschränkt. Dann gäbe es zu jedem p=1,2,3... ein $b_p \in B$ mit $|f(b_p)| > p$. Dazu gibt es eine in B konvergente Teilfolge: $\lim_{i\to\infty} b_{p_i} = b \in B$. Da f auf B stetig ist, ist $f(b) = \lim_{i\to\infty} f(b_{p_i})$, Widerspruch gegen $f(b_{p_i}) > p_i$ für alle i.
- 2. Angenommen, f(B) wäre nicht abgeschlossen. Dann gäbe es nach Satz 11 eine Cauchyfolge in f(B), deren (in \mathbb{R}^m vorhandener) Grenzwert nicht zu f(B) gehört. Aber die Urbildfolge enthält eine in B konvergente Teilfolge, etwa gegen $b \in B$. Deren f-Bilder konvergieren wegen der Stetigkeit von f gegen f(b). Da für eine Cauchyfolge jede Teilfolge denselben Grenzwert besitzt wie sie selbst, konvergiert die ursprüngliche Folge doch gegen $f(b) \in f(B)$.

Folgerung: Jede reellwertige stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n nimmt dort ihr Maximum an.

Operatornorm: Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$. Mit Benutzung von Cauchy-Schwarz finden wir

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j)^2 \le \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij}^2)) \cdot (\sum_{j=1}^n x_j^2) = |x|^2 \cdot \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$$

Insbesondere ist |Ax| auf der Einheitskugel |x|=1 beschränkt. Daher existiert

$$\sup_{|x|=1} |Ax| = \max_{|x|=1} |Ax| =: ||A||$$

Definition: ||A|| heißt die Operatornorm von A.

Ist x beliebig $\neq 0$, so liegt $\frac{1}{|x|}x$ auf der Einheitskugel, und nach Definition ist $|A(\frac{1}{|x|}x)| \leq ||A||$. Durch Multiplikation mit |x| folgt

$$|Ax| < |A| \cdot |x| \text{ für alle } x$$

Daraus folgt sofort

(2)
$$||AB|| = \sup_{|x|=1} |ABx| \le \sup_{|x|=1} (||A|| \cdot |Bx|) \le ||A|| \cdot ||B||$$

Nach (1) ist ||A|| = 0 nur für A = 0. Daher gilt in (2) tatsächlich nur \leq und nicht =; zum Beispiel für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $|Ax|^2 = x_2^2 \leq |x|^2$ mit = für $x_1 = 0$. Also ist ||A|| = 1, aber $A^2 = 0$, also $||A^2|| < ||A||^2$. Die Operatornorm ist also nicht multplikativ. Man nennt die Eigenschaft (2) submultiplikativ.

7. Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n

Erinnerung: Eine auf einem offenen Intervall $U \subset \mathbb{R}$ definierte reellwertige Fuktion f hieß an der Stelle $a \in U$ differenzierbar, wenn

(1)
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{exisitient}$$

In diesem Falle hieß der Grenzwert die Ableitung von f an der Stelle a, bezeichnet f'(a).

Für Abbildungen f von (Teilen des) \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m kann man nicht genau so verfahren, weil man ja durch Vektoren nicht dividieren kann. Man schreibt (1) um in

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0$$

Das bedeutet dasselbe wie

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{|x - a|} = 0$$

Genau in diesem Sinne sollen Funktionen mehrerer Veränderlicher durch (inhomogen) lineare Funktionen approximiert werden.

Definition 1. Eine auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ definierte Abbildung in den \mathbb{R}^m heißt an der Stelle $a \in U$ differenzierbar, wenn es eine $(m \times n)$ -Matrix A gibt, so daß

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + |x - a|\phi(x)$$

wobei für das durch diese Gleichung für $x \neq a$ definierte ϕ gilt

$$\phi(x) \to 0 \text{ für } x \to a$$

(Das ist die Definition nach Königsberger, Analysis II, in Forster heißt dasselbe total differenzierbar)

Zur Klarstellung: Die letzte Aussage bedeutet: Zu $\epsilon>0$ gibt es $\delta>0$ so, daß $|\phi(x)|<\epsilon$ für ALLE x mit $|x-a|<\delta$. Insbesondere gibt es $\delta>0$ so, daß $|\phi(x)|<1$ für $|x-a|<\delta$. Für $|x-a|<\delta$ ist also

$$|f(x) - f(a)| = |A(x - a) + |x - a|\phi(x)| \le (||A|| + 1)|x - a|,$$

was in Evidenz setzt, daß jede an der Stelle a differenzierbare Abbildung dort sicherlich stetig ist.

x kann auf vielen Wegen gegen a laufen:

Läuft man achsenparallel gegen a, so erhält man die sogenannten partiellen Ableitungen:

Definition 2. Eine reellwertige Funktion f auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt an der Stelle $a \in U$ partiell nach x_i differenzierbar, wenn die Funktion

$$\phi(t) := f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n)$$

der reellen Variablen t an der Stelle $t=a_i$ differenzierbar ist. Die Ableitung $\phi'(a_i)$ heißt die partielle Ableitung von f an der Stelle a und wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ oder } \partial_i f(a)$$

bezeichnet. Also

$$\partial_i f(a) = \lim_{t \to a_i} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a)}{t - a_i}$$

Lemma 1. Sei f differenzierbar an der Stelle $a \in U$ im Sinne von Definition 1. Dann existieren alle partiellen Ableitungen aller Komponenten f_i von f an der Stelle a, und A ist die Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad (i = 1, ..., m, \ j = 1,, n)$$

Beweis: Man läuft in Definition 1 parallel zur x_j -Achse gegen a, d.h. man setzt $x=a+he_j$ und läßt h gegen 0 laufen. Dann ist $A(x-a)=h\cdot Ae_j$, und die i-te Komponente davon ist ha_{ij} . Da eine Folge im \mathbb{R}^m genau dann konvergiert, wenn alle Koordinatenfolgen dies tun, haben wir nach Definition 1 koordinatenweise

$$0 = \lim_{h \to 0} \phi_i(a + he_j) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(a + he_j) - f_i(a) - a_{ij}h}{|h|}$$

Das bedeutet nach Definition 2, daß

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

Definition: Die Matrix der partiellen Ableitungen von f heißt die Jacobimatrix von f:

$$Df = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$$

Leider gilt von Lemma 1 nicht die Umkehrung:

Beispiel: n = 2, m = 1 und

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } x = y = 0 \end{cases}$$

Da f(x,0)=0 für alle x und f(0,y)=0 für alle y, sind alle partiellen Ableitungen von f gleich 0. Wenn es also eine Matrix A wie in Definition 1 gibt, dann muß sie nach Lemma 1 null sein. Der Rest ϕ aus Definition 1 ist dann

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Auf der Winkelhalbierenden x=y hat dies den Wert $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ wenn x>0 und $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ wenn x<0. Also gibt es keinen Grenzwert für $x\to 0$.

Aber es gilt

Lemma 2. Die partiellen Ableitungen von f seien in einer Umgebung der Stelle $a \in U$ vorhanden und an der Stelle a stetig. Dann ist f an der Stelle a differenzierbar im Sinne von Definition 1.

Beweis: Es genügt m=1. Dann ist $Df=(\partial_1 f,....,\partial_n f)$. Zu zeigen ist

(1)
$$\frac{f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)(x_i - a_i)}{|x - a|} \to 0 \text{ für } x \to a$$

Dazu schreibe

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_1, ..., x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(x_1, ..., x_{i-1}, a_i, ..., a_n)]$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus Analysis I ist dies

$$= \sum_{i=1}^{n} \partial_{i} f(x_{1}, ..., x_{i-1}, \xi_{i}, a_{i+1}, ..., a_{n}) (x_{i} - a_{i})$$

mit Werten ξ_i zwischen a_i und x_i . Der Betrag des Zählers in (1) ist nun

$$= |\sum_{i=1}^{n} \{\partial_{i} f(a_{1}, ..., a_{i-1}, \xi_{i}, a_{i+1}, ..., a_{n}) - \partial_{i} f(a)\} (x_{i} - a_{i})|$$

$$\leq |x - a| \cdot \sqrt{\sum [...]^2}$$
 (Cauchy-Schwarz)

Da die partiellen Ableitungen an der Stelle a stetig sind, gehen die [...] und mit ihnen der rechte Faktor gegen 0, qed.

Merke die Kurzfassung:

partielle Ableitungen von f vorhanden und stetig \Longrightarrow

f differenzierbar \Longrightarrow

partielle Ableitungen von f vorhanden

Beispiele:

f(x) = Ax + b mit konstanter Matrix A und konstantem Vektor b

Dann ist Df(a) = A für alle a.

 $f(x) = x^t A x$ mit einer symmetrischen Matrix A.

$$f(x) - f(a) = x^t A x - x^t A a + a^t A x - a^t A a = x^t A (x - a) + a^t A (x - a) = 2a^t A (x - a) + (x^t - a^t) A (x - a)$$

Nach Definition 1 ist $Df(a) = 2a^t A$.

Kettenregel:

Satz 16. Sei

g definiert auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ f definiert auf der offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^m$,

$$a \in U$$
, $f(a) = b$ und $g(U) \subset V$.

Ist

g differenzierbar an der Stelle a und

f differenzierbar an der Stelle g(a),

so ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle a, und für die Jacobimatrizen gilt

$$D(f \circ g)(a) = D(f)(g(a)) \cdot D(g)(a)$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$g(x) - g(a) = Dg(a)(x - a) + |x - a|\phi(x)$$

$$f(y) - f(b) = Df(b)(y - b) + |y - b|\psi(y)$$

mit $\phi(x) \to 0$ für $x \to a$ und $\psi(y) \to 0$ für $y \to b\,.$ Daraus folgt

$$f(g(x)) - f(g(a)) = Df(g(a))(g(x) - g(a)) + |g(x) - g(a)|\psi(g(x)) =$$

$$Df(g(a))\{Dg(a)(x-a) + |x-a|\phi(x)\} + |g(x)-g(a)|\psi(g(x)) = Df(g(a) \cdot Dg(a) \cdot (x-a) + Rg(a))\}$$

wobei

$$|R| \le |x - a| \cdot |Df(g(a))\phi(x)| + |g(x) - g(a)| \cdot |\psi(g(x))|$$

$$\le |x - a| \cdot ||Df(g(a))|| \cdot |\phi(x)| + |Dg(a)(x - a) + |x - a|\phi(x)| \cdot |\psi(g(x))|$$

$$\le |x - a| \cdot \{||Df(g(a))|| \cdot |\phi(x)| + ||Dg(a)|| \cdot |\psi(g(x))| + |\phi(x)| \cdot |\psi(g(x))|\}$$

Für $x \to a$ geht auch $g(x) \to g(a)$, weil g an der Stelle a stetig ist, und damit gehen alle drei Summanden in der geschweiften Klammer gegen 0 für $x \to a$.

Beispiel: 1. f sei eine reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, und g bilde ein offenes Intervall der reellen Achse nach U ab.

Wir können uns t als Zeit vorstellen und f als Temperatur im Raum, h(t) := f(g(t)) ist dann die Temperatur, die ein Reisender auf dem Wege g(t) zur Zeit t erlebt. Die Kettenregel sagt

$$h'(t) = Df(g(t)) \cdot Dg(t) = (\partial_1 f,, \partial_n f)(g(t)) \begin{pmatrix} g'_1(t) \\ \vdots \\ g'_n(t) \end{pmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^n \partial_i f(g(t)) g'_i(t)$$

Dies ist ein skalares Produkt von zwei Vektoren.

Definition: Für eine reellwertige differenzierbare Funktion heißt der Vektor der partiellen Ableitungen von f der Gradient von f. Er ist also per definitionem die gestürzte Jacobimatrix von f:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix} = D(f)^t$$

Mit dieser Definition ist

$$h'(t) = (\text{grad } f(g(t)), g'(t))$$

Speziell wenn g(t) = a + t(b-a) die Verbindungsgerade der Punkte a und b beschreibt, dann ist g'(t) = b - a und

$$h'(t) = (\operatorname{grad} f(a + t(b - a)), b - a)$$
 (Richtungsableitung)

2. Eine reellwertige Funktion h auf dem \mathbb{R}^n , die nur von der Entfernung vom Nullpunkt abhängt, läßt sich in der Gestalt

$$h(x) = f(r) \text{ mit } r = |x| = \sqrt{\sum_{i} x_i^2}$$

schreiben. Die Kettenregel sagt

$$Dh(x) = Df(r(x))Dr(x)$$

hier ist f eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen, also Df einfach = f'. Hingegen ist Dr die Zeile der partiellen Ableitungen von r nach den x_i , also $Dr = (\frac{x_1}{r}, ..., \frac{x_n}{r})$. Stürzt man, so erhält man

$$\operatorname{grad} h(x) = \frac{f'(r)}{r} x$$

Partielle Differentiation kann man mehrmals hintereinander ausführen. Dabei ist nicht immer $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ (vgl Aufgabe 26). Aber: Wir sagen, f sei k-mal stetig differenzierbar, wenn ALLE partiellen Ableitungen $\partial_{i_1} \partial_{i_k} f$ bis zur Gesamtordnung k vorhanden und stetig sind.

Satz 17. Die reellwertige Funktion f sei in der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann ist $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für alle i, j.

Beweis: Es genügt, den Satz für n=2 und an der Stelle 0 zu beweisen. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewandt auf die Funktion $g_y(x) := f(x,y) - f(x,0)$ der reellen Variablen x folgt

$$f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) = g_y'(\xi) \cdot x$$
mit ξ zwischen 0 und x

Aber $g'_y(x) = \partial_x f(x, y) - \partial_x f(x, 0)$. Es folgt

$$f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0) = (\partial_x f(\xi,y) - \partial_x f(\xi,0)) \cdot x = \partial_y \partial_x (\xi,\eta) \cdot xy$$

mit η zwischen 0 und y. Vertauscht man die Rollen von x und y, so findet man Zwischenwerte $\tilde{\xi}$ und $\tilde{\eta}$ mit

$$f(x,y) - f(0,y) - f(x,0) + f(0,0) = \partial_x \partial_y f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \cdot xy$$

Für $xy \neq 0$ folgt

$$\partial_x \partial_y f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \partial_y \partial_x f(\xi, \eta)$$

Da die zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle 0 stetig sind, strebt die linke Seite für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegen $\partial_x \partial_y f(0,0)$ und die rechte gegen $\partial_y \partial_x f(0,0)$.

Anwendung: Eine Abbildung f einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ in den \mathbb{R}^n nennt man auch ein Vektorfeld. Ist zum Beispiel f eine reellwertige Funktion, so ist grad f ein Vektorfeld. Aber nicht jedes Vektorfeld ist ein Gradientenfeld: wenn

$$v(x) = \operatorname{grad} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

dann muß nach dem eben bewiesenen Satz

$$\partial_i v_j(x) = \partial_j v_i(x)$$
 für alle i, j

gelten. (Sogenannte Integrabilitätsbedingungen)

Definition: Für ein beliebiges Vektorfeld v im \mathbb{R}^3 heißt

$$\operatorname{rot} v := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

die Rotation von $\,v$. Satz 17 im $\,\mathbb{R}^3\,$ besagt also

$$rot grad f = 0$$

Definition:Für ein differenzierbares Vektorfeld vim \mathbb{R}^n heißt

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i v_i =: \operatorname{div} v$$

die Divergenz von $\,v\,.\,$

Aus Satz 17 folgt unmittelbar für jedes Vektorfeld v im \mathbb{R}^3

 $\operatorname{div}\,\operatorname{rot}\,v=0$

8. Taylorformel

Erinnerung an die Taylorformel in einer Variablen: Durch partielle Integration folgt

$$\frac{1}{k!} \int_{a}^{x} f^{(k+1)}(t) (x-t)^{k} dt = -\frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^{k} + \frac{1}{(k-1)!} \int_{a}^{x} f^{(k)}(t) (x-t)^{k-1} dt$$

Summiert man dies über k von 1 bis n, so erhält man (mit Benutzung des Hauptsatzes auf der rechten Seite für k=1)

$$\frac{1}{n!} \int_{a}^{x} f^{(n+1)}(t) (x-t)^{n} dt = -\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^{k} + f(x) - f(a)$$

und das ist, wenn man es noch passend umstellt die bekannte Tayloformel für (n+1)-mal stetig differenzierbare Funktionen einer reellen Variablen. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung kann man das Integralrestglied (beachte, daß x-t im Integrationsintervall sein Vorzeichen nicht wechselt) ausdrücken durch

$$\frac{f^{(n+1)}(\tau)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit einem Wert τ zwischen a und x.

Jetzt sei eine reellwertige Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, und alle partiellen Ableitungen von f bis zur Gesamtordnung k seien vorhanden und stetig. Dann seien a und x zwei Punkte in U derart, daß die Verbindungsstrecke von a bis x ganz in U enthalten ist.

Man setzt

$$g(t) = f(a + t(x - a))$$

Nach der Kettenregel ist nun

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a + t(x - a)) \cdot (x_i - a_i)$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(a + t(x - a)) \cdot (x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

:

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f((a+t(x-a)) (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_k} - a_{i_k})$$

Dies tragen wir ein in die Taylorformel

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \frac{1}{3!}g'''(0) + \dots$$

für g:

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(a) (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots$$

$$+\frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} f(a) (x_{i_1} - a_{i_1}) \ldots (x_{i_k} - a_{i_k}) + R$$

mit

$$R = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i=1}^{n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_{k+1}} f(a + \tau(x-a)) (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_{k+1}} - a_{i_{k+1}})$$

Die (k+1)-ten Ableitungen sind nach Voraussetzung stetig, also auf jeder kompakten ganz in U enthaltenen Kugel $|x-a| \le r$ beschränkt, etwa $\le M_r$. Damit ist der Rest

$$|R| \le \frac{n^{k+1}M_r}{(k+1)!} \cdot |x-a|_{\infty}^{k+1} =: C_k(r) \cdot |x-a|^{k+1} \text{ für alle } x \text{ mit } |x-a| \le r$$

k = 1:

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)(x_i - a_i) + R = f(a) + (\operatorname{grad} f(a), x - a)) + R$$

mit

$$|R| \le C_1(r)|x-a|^2$$
 für $|x-a| \le r$

Angenommen, f habe an der Stelle a ein lokales Minimum. Das bedeutet: es gibt eine Umgebung V von a derart daß $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in V$. Für alle $x \in V$ mit $|x - a| \leq r$ ist dann

$$0 \le f(x) - f(a) = (\operatorname{grad} f(a), x - a) + R \le (\operatorname{grad} f(a), x - a) + C_1(r)|x - a|^2$$

Wenn man $x = a + \lambda \operatorname{grad} f(a)$ setzt, so ist der erste Term linear in λ und der zweite quadratisch. Für $\lambda \to 0$ sieht man, daß grad f(a) = 0 sein muß. Analoges gilt für ein lokales Maximum.

Ergebnis: Wenn f an der Stelle a ein lokales Extremum hat (und zweimal stetig differenzierbar ist), dann ist

$$\operatorname{grad} f(a) = 0$$

Jetzt nehmen wir umgekehrt an, daß gradf(a) = 0. Dann lautet die Taylorformel (mit k = 2)

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + R$$

 $_{
m mit}$

$$|R| \le C_2(r) |x - a|^3$$

Jetzt haben wir eine quadratische Form in x-a, nämlich

$$(x-a)^t H_f(a)(x-a) \text{ mit } H_f = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f & \dots & \partial_1 \partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f & \dots & \partial_n^2 f \end{pmatrix}$$

Definition: Die Matrix H_f heißt die Hessematrix von f.

Die Änderung von f in der Nähe von a hängt jetzt offenbar von den Werten der quadratischen Form ab. Nach Kap 5 heißt eine reelle symmetrische Matrix H positiv definit, wenn $z^t H z > 0$ für alle $z \neq 0$. Ist das der Fall, so nimmt die Funktion $h(z) := z^t H z$ auf der Einheitskugel |z| = 1 ein positives Minimum μ an. Dann gilt

$$z^t H z \ge \mu |z|^2$$
 für alle $z \in \mathbb{R}^n$

Nehmen wir jetzt einmal an, die Hessematrix von f an der Stelle a sei positiv defnit. Dann gibt es eine Zahl $\mu > 0$ so, daß $(x-a)^t H_f(a)(x-a) \ge \mu |x-a|^2$ für alle x. Für $|x-a| \le r$ ist dann

$$f(x) - f(a) \ge \mu |x - a|^2 - C_2(r)|x - a|^3$$

Für alle hinreichend kleinen |x-a| (aber $x \neq a$) ist nun die rechte Seite echt größer als 0.

Definition: Die Funktion f hat an der Stelle a ein isoliertes lokales Minimum, wenn es eine Umgebung V von a gibt so daß

$$f(x) > f(a)$$
 für alle $x \in V$, $x \neq a$

Ergebnis: Wenn $\operatorname{grad} f(a) = 0$ und wenn die Hessematrix von f an der Stelle a positiv definit ist, dann besitzt f an der Stelle a ein isoliertes lokales Minimum.

Entsprechend besitzt f ein isoliertes lokales Maximum, wenn die Hessematrix negativ definit ist.

Wenn die Hessematrix vollen Rang hat aber weder positiv noch negativ definit ist, dann läßt sich die quadratische Form auf

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_n^2$$
 mit 0

transformieren. In den Richtungen mit $y_{p+1}=\ldots=y_n=0$ wächst dann die Funktion, und in den Richtungen $y_1=\ldots y_p=0$ nimmt sie ab. Einen solchen Punkt nennt man Sattelpunkt. Prototypen für eine Fläche $x_3=f(x_1,x_2)$ mit Minimum bzw. Sattelpunkt sind das elliptische Paraboloid bzw. das hyperbolische Paraboloid:

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2$$
elliptisches Paraboloid

$$x_3 = x_1^2 - x_2^2$$
 hyperbolisches Paraboloid

Wenn die Hessematrix nicht vollen Rang hat, kann man auf diese Weise nichts mehr schließen (vgl Aufgabe 31)

9. Der Umkehrsatz

Das erste wichtige Hilfsmittel zum Beweis des Umkehrsatzes ist der Banachsche Fixpunktsatz.

Der Abstand von zwei Punkten x und y im \mathbb{R}^n ist |x-y|. Für den Banachschen Fixpunktsatz wird nur der Abstand, nicht die Vektorraumstruktur und nicht die Herkunft des Abstandes von der Norm gebraucht. Er wird deshalb üblicherweise für sogenannte metrische Räume formuliert:

Definition: Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ mit

- 1. $d(x,y) \ge 0$ für alle x,y und = 0 nur für x = y
- 2. d(x,y) = d(y,x)
- 3. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ für alle x,y,z. (Dreiecksungleichung)

Die Metrik gibt Anlaß zu einem Konvergenzbegriff:

Die Folge $(x_n)_n$ konvergiert gegen x (in Formeln $\lim_{n\to\infty} x_n = x$), wenn $d(x_n, x)$ eine reelle Nullfolge ist. $(x_n)_n$ ist Cauchyfolge in X, wenn $d(x_n, x_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$.

X heißt vollständig, wenn in X jede Cauchyfolge konvergiert.

Definition: Eine Abbildung $f: X \to X$ heißt kontrahierend, wenn es eine Konstante κ gibt mit $0 < \kappa < 1$ und

$$d(f(x), f(y)) \le \kappa d(x, y)$$
 für alle $x, y \in X$

Satz 18. (Banachscher Fixpunktsatz) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und f eine kontrahierende Abbildung von X in sich. Dann gibt es genau einen Fixpunkt; das ist ein Punkt ξ mit $f(\xi) = \xi$.

Beweis: Existenz: Man wählt $x_0 \in X$ beliebig und setzt $x_n = f(x_{n-1})$ für alle $n \ge 1$. Dann ist

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \le \kappa d(x_{n-1}, x_n)$$

Induktiv folgt daraus

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \kappa^n d(x_0, x_1)$$

Für n < m folgt nach der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \le \sum_{i=n}^{m-1} \kappa^i d(x_0, x_1) \le \frac{\kappa^n}{1 - \kappa} d(x_0, x_1)$$

Also bilden die x_n eine Cauchyfolge in X, und da X vollständig ist, existiert

$$\lim_{n\to\infty} x_n =: \xi$$

 ξ ist ein Fixpunkt; denn

$$d(\xi, f(\xi)) \le d(\xi, x_n) + d(x_n, f(\xi)) \le d(\xi, x_n) + \kappa d(x_{n-1}, \xi) < (1 + \kappa)\epsilon$$

wenn $\,n\,$ groß genug. Daraus folgt $\,f(\xi)=\xi\,.$

Eindeutigkeit: Ist auch noch $\eta = f(\eta)$, so ist

$$0 \leq d(\xi,\eta) = d(f(\xi),f(\eta)) \leq \kappa d(\xi,\eta))$$

und wegen $\kappa < 1$ ist das nur möglich wenn $d(\xi, \eta) = 0$, also $\xi = \eta$.

Besonders häufiges Beispiel für kontrahierende Abbildungen: Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall (a,b) und dort überall |f'(x)| < 1. Auf jedem kompakten Teilintervall $[c,d] \subset (a,b)$ gibt es dann eine Konstante $\kappa < 1$ mit $|f'(x)| \leq \kappa$ für alle $x \in [c,d]$. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt dann (mit passendem $\xi \in (x,y) \subset [c,d]$)

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)(x-y)| \le \kappa |x-y|$$
 für alle $x,y\in [c,d]$

Eine solche Aussage möchten wir auch für Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m . Das Problem besteht darin: wenn wir einfach den Mittelwertsatz auf die Komponenten von f anwenden, bekommen wir a priori für jede Komponente ein anderes ξ , und dann kann man die Ungleichungen nicht ohne weiteres zusammenfassen. Ausweg:

Für eine vektorwertige Funktion einer reellen Variablen erklären wir das Integral komponentenweise:

$$\int_a^b v(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b v_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b v_n(t) dt \end{pmatrix}$$

Lemma 1.

$$\left| \int_{a}^{b} v(t) \, dt \right| \le \int_{a}^{b} \left| v(t) \right| dt$$

Beweis: Für alle $z \in \mathbb{R}^n$ ist $|z| = \sup_{|u|=1} (u, z)$. Daher ist

$$|\int_{a}^{b} v(t) dt| = \sup_{|u|=1} (u, \int_{a}^{b} v(t) dt) = \sup_{|u|=1} \int_{a}^{b} (u, v(t)) dt$$

 $\leq \sup_{|u|=1} \int_a^b |u| \cdot |v(t)| dt$ (Cauchy-Schwarz und Monotonie des Integrals)

$$= \int_{a}^{b} |v(t)| dt$$

Mit Hilfe von Lemma 1 beweisen wir den Mittelwertsatz:

Satz 19. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Seien $a, x \in U$ so, daß die Verbindungsstrecke von a nach x ganz in U liegt und sei M das Supremum von ||Df|| auf dieser Strecke:

$$M = \sup_{0 \le t \le 1} ||Df(a + t(x - a))||$$

Dann gilt

$$|f(x) - f(a)| \le M \cdot |x - a|$$

Beweis: Setze g(t) = f(a + t(x - a)). g ist eine Abbildung des Intervalls [0,1] in den \mathbb{R}^m . Es ist

$$f(x) - f(a) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt$$
 (Integral wie oben komponentenweise)

$$= \int_0^1 Df(a+t(x-a)) \cdot (x-a)dt$$

Nach dem Lemma folgt

$$|f(x) - f(a)| \le \int_0^1 |Df(a + t(x - a))(x - a)| dt \le \int_0^1 ||Df(a + t(x - a))|| \cdot |x - a| dt \le M \cdot |x - a|$$

Mit Hilfe dieses Mittelwertsatzes und des Banachschen Fixpunktsatzes beweisen wir jetzt den Umkehrsatz:

Satz 20. U sei eine offene Teilmenge im \mathbb{R}^n und f eine stetig differenzierbare Abbildung von U in den \mathbb{R}^n . Sei $a \in U$ und die Jacobimatrix Df(a) invertierbar. Dann gibt es offene Umgebungen $V \ni b := f(a)$ und $U_0 \ni a$ ($U_0 \subset U$) so, daß U_0 durch f bijektiv auf V abgebildet wird. Die Umkehrabbildung $g: V \to U_0$ ist stetig differenzierbar, und

$$Dg(b) = Df(a)^{-1}$$

Beweis: Durch Verschieben (notfalls ersetze f(x) durch f(x+a)-f(a)) kann man a=b=0 annehmen. Sei A=Df(0). Nach der Kettenregel ist die Jacobimatrix der Abbildung $A^{-1}f(x)$ die Einheitsmatrix. Also kann man auch $Df(0)=\mathbf{1}$ annehmen. Jetzt sei zunächst $y\in\mathbb{R}^n$ fest und

$$\phi_y(x) := y + x - f(x)$$
 für $x \in U$

Offenbar ist x Fixpunkt von ϕ_y genau dann, wenn y = f(x). Da Df stetig und Df(0) = 1, gibt es r > 0 so, daß die Kugel $\overline{K_{2r}(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 2r\}$ ganz in U liegt und

$$(1) ||\mathbf{1} - Df(x)|| \le \frac{1}{2} \text{ für } |x| \le 2r$$

Nach Definition ist

$$D\phi_u = \mathbf{1} - Df$$

Für irgendzwei Punkte x_1, x_2 innerhalb der Kugel $\overline{K_{2r}(0)}$ liegt ihre Verbindungsstrecke auch ganz darin. Deshalb folgt aus Satz 19 und aus (1)

(2)
$$|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| \le \frac{1}{2} |x_1 - x_2| \text{ für } |x_1|, |x_2| \le 2r$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt hieraus

(3)
$$|\phi_y(x)| \le |\phi_y(x) - \phi_y(0)| + |\phi_y(0)| \le \frac{1}{2}|x| + |y| < 2r$$

für alle x, y mit $|x| \le 2r$ und |y| < r.

Aus (2) und (3) sieht man: Für |y| < r bildet ϕ_y die Kugel $\overline{K_{2r}(0)}$ in sich ab und ist kontrahierend mit dem Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$. Da die (kompakte!) Kugel vollständig ist, besitzt ϕ_y nach dem Fixpunktsatz 18 genau einen Fixpunkt x; nach (3) liegt dieser sogar in der offenen Kugel $K_{2r}(0)$.

Ergebnis: Zu jedem y mit |y| < r gibt es genau ein x mit |x| < 2r und y = f(x). Man setzt

$$V = K_r(0), \ U_0 = f^{-1}(V) \cap K_{2r}(0)$$
 und

 $g(y) = \text{dem oben zu } y \in K_r(0) \text{ gefundenen } x \in K_{2r}(0) \text{ (also in } U_0)$

Nun:

Für alle
$$y \in V$$
 ist $q(y) \in U_0$ und $fq(y) = y$

Für alle
$$x \in U_0$$
 ist $f(x) \in V$ und $gf(x) = x$

f und g sind also zueinander inverse Bijektionen $U_0 \to V$ bzw. $V \to U_0$.

Jetzt müssen wir noch die Differenzierbarkeit von g beweisen. Dazu zeigen wir zuerst, daß g stetig ist: Seien $y_1, y_2 \in V$ und $x_i = g(y_i)$. Nach Definition von ϕ_0 ist

$$x_2 - x_1 = f(x_2) + \phi_0(x_2) - f(x_1) - \phi_0(x_1)$$

Nach (2) folgt daraus

$$|x_2 - x_1| \le |y_2 - y_1| + \frac{1}{2}|x_2 - x_1|$$

also

$$|g(y_1) - g(y_2)| = |x_1 - x_2| \le 2|y_1 - y_2|$$

Damit ist g sicherlich stetig.

Für $y_1, y_2 \in V$ und $x_i = g(y_i)$ gilt, da f differenzierbar,

$$y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = Df(x_2)(x_1 - x_2) + |x_1 - x_2| \phi \text{ mit } \lim_{x_1 \to x_2} \phi(x_1) = 0$$

Dies multipliziert man von links mit der Matrix $B^{-1} := Df(x_2)^{-1}$:

$$B^{-1}(y_1 - y_2) = x_1 - x_2 + |x_1 - x_2|B^{-1}\phi$$
, umgestellt

$$g(y_1) - g(y_2) = B^{-1}(y_1 - y_2) - |x_1 - x_2|B^{-1}\phi$$

Der Restterm ist der Norm nach

$$\leq |x_1 - x_2| \cdot |B^{-1}\phi| \leq 2|y_1 - y_2| \cdot ||B^{-1}|| \cdot |\phi|$$

 ϕ geht gegen 0, wenn $x_1 \to x_2$. Da nun g stetig ist, geht ϕ auch gegen 0, wenn $y_1 \to y_2$. Das beweist die Differenzierbarkeit von g und gleichzeitig $Dg(y_2) = B^{-1} = Df(x_2)^{-1}$ (was natürlich auch aus g(f(x)) = x und der Kettenregel folgt). Daraus sieht man zudem, daß Dg auch wieder stetig ist. Damit ist der Umkehrsatz bewiesen.

Beispiel: Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2 :

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\phi \\ y & = & r\sin\phi \end{array} \quad (r > 0)$$

Die Jacobimatrix ist

$$Df = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix}$$

Ihre Determinante ist r, sie ist also an jeder Stelle $\binom{r}{\phi}$ mit r>0 invertierbar. An diesem Beispiel sieht man auch, daß f, selbst wenn überall lokal, so doch nicht global umkehrbar zu sein braucht.

10. Implizite Funktionen, Extrema mit Nebenbedingungen

Eng verknüpft mit dem Umkehrsatz ist der Satz über implizite Funktionen. In manchen Büchern wird dieser zuerst bewiesen und jener daraus hergeleitet, in manchen umgekehrt. Wir haben jetzt den Umkehrsatz und wollen daraus den Satz über implizite Funktionen herleiten. Einfachste Beispiele:

1. Ein (n-1)-dimensionaler Unterraum H des \mathbb{R}^n wird beschrieben durch eine Gleichung $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, nicht alle $a_i = 0$. Ist zum Beispiel $a_n \neq 0$, so läßt sich für alle $x \in H$ die letzte Koordinate x_n durch die übrigen ausdrücken:

$$x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} x_i$$

und zu jedem (n-1)-Tupel $x_1,...,x_{n-1}$ gehört genau ein Punkt auf H.

2. Die Einheitskreislinie im \mathbb{R}^2 wird beschrieben durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = 1$. In keiner Umgebung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man x_2 als Funktion von x_1 ausdrücken, weil es zu jedem Wert von x_1 zwei Werte von x_2 gibt.

In der Nähe von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist jedoch die positive Wurzel aus $1 - x_1^2$ eine wohlbestimmte Funktion von x_1 :

$$x_2 = \sqrt{1 - x_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} {1 \choose 2 \choose n} (-x_1^2)^n$$

Was haben Beispiel 1 und 2 gemeinsam? Für die Relation f = 0 zwischen den Koordinaten ist

- 1. $\partial_n f = a_n \neq 0$ für alle x
- 2. $\partial_2 f = 2x_2 \neq 0$ genau dann, wenn $x_2 \neq 0$.

Gegeben seien jetzt p reellwertige Funktionen $f_1,, f_p$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Die Gleichungen $f_1(x) = f_2(x) = = f_p(x) = 0$ beschreiben eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$. Vorstellung: Wir wollen die p Gleichungen benutzen, um p der Koordinaten zu eliminieren und die Punkte von X durch die übrigen n-p Koordinaten "parametrisieren". Genauer:

Satz 21. (Satz über implizite Funktionen) Sei U offen im \mathbb{R}^n und $f_1,...,f_p$ stetig differenzierbare Funk-

tionen auf
$$U$$
. Sei $a \in U$ und $f_1(a) = ... = f_p(a) = 0$, und für die Abbildung $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ von U in den

 \mathbb{R}^p habe die Jacobimatrix an der Stelle $\,a\,$

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p & \dots & \partial_n f_p \end{pmatrix} (a)$$

den Rang p. Dann mögen die Variablen $x_1,...,x_n$ so numeriert sein, daß die Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_p f_1 \\ \vdots & & & \\ \partial_1 f_p & & \partial_p f_p \end{pmatrix} (a)$$

invertierbar ist. Dann gibt es eine offene Umgebung W' von $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^p , eine offene Umgebung W

von $\begin{pmatrix} a_{p+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^{n-p} und auf W definierte stetig differenzierbare Funktionen $\phi_1,...,\phi_p$ derart, daß für alle $x \in W' \times W$ gilt

$$f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0 \Leftrightarrow x_i = \phi_i(x_{p+1}, \dots, x_n) \text{ für } i = 1, \dots, p$$

Beweis: oE sei wieder a=0. Wir unterteilen die Vektoren des \mathbb{R}^n in den Vektor der ersten p Komponenten und den Vektor der letzten n-p Komponenten und bezeichnen sie dementsprechend mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, wobei $x \in \mathbb{R}^p$ und $y \in \mathbb{R}^{n-p}$. Ebenso unterteilen wir die Jacobimatrix von f in die $(p \times p)$ -Matrix A der ersten p Spalten und den Rest B:

$$Df = (A, B)$$

Nach Voraussetzung ist A(0) invertierbar.

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$ setzt man

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Dann ist g(0) = 0, und

$$Dg = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & \mathbf{1}_{n-p} \end{pmatrix}$$

Mit A(0) ist auch Dg(0) invertierbar, und g ist eine stetig differenzierbare Abbildung von U in den \mathbb{R}^n . Nach dem Umkehrsatz gibt es Umgebungen $U_0 \subset U$ von 0 und $V = g(U_0)$ von 0 und eine stetig differenzierbare Abbildung h von V nach U_0 so, daß

$$(h \circ g)(z) = z$$
 für alle $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_0$ und $(g \circ h)(z) = z$ für alle $z \in V$

oE sei U_0 ein offener Quader um 0, den wir in der Gestalt $W' \times W_1$ schreiben mit offenen Quadern W' und W_1 in \mathbb{R}^p bzw. \mathbb{R}^{n-p} .

h wird auch unterteilt: $h = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Aus gh(z) = z folgt für $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ?? \\ v(z) \end{pmatrix}$$

Also ist

$$v\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y$$
 für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V$

 $W_2 := \{ y \in \mathbb{R}^{n-p} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in V \}$ ist offen, und es gibt einen 0 enthaltenden offenen Quader $W \subset W_1 \cap W_2$.

Für $y \in W$ setzt man $\phi(y) = u \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Sei jetzt $x \in W'$ und $y \in W$. Dann ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_0$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in V$.

(a)
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = hg\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(y) \\ y \end{pmatrix}, \text{ also } x = \phi(y)$$

$$(b) x = \phi(y) \Rightarrow \begin{pmatrix} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \phi(y) \\ y \end{pmatrix} = gh \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \text{ also } f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

(a) und (b) zeigen: Für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W' \times W$ ist $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ gleichbedeutend mit $x = \phi(y)$, und das war die Behauptung.

Zusatz: Aus

$$f(\begin{pmatrix} \phi(y) \\ y \end{pmatrix}) = 0$$

für alle y folgt nach der Kettenregel

$$Df \cdot \begin{pmatrix} D\phi \\ \mathbf{1}_{n-p} \end{pmatrix} = 0$$

Setzen wir die Zerlegung Df = (A, B) ein, so folgt

$$(1) A \cdot D\phi + B = 0$$

Anwendung: Man sagt, die Funktion F nehme an der Stelle a ein lokales Maximum mit den Nebenbedingungen $f_i = 0$ an, wenn $f_1(a) = \dots = f_p(a) = 0$ und es eine Umgebung U von a gibt derart daß

$$F(a) \ge F(x)$$
 für alle $x \in U$ mit $f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0$

Ist dies der Fall und F stetig differenzierbar, dann hat die Funktion $G(y) := F\begin{pmatrix} \phi(y) \\ y \end{pmatrix}$ ein lokales Maximum im üblichen Sinne (Kap 7). Daher ist notwendigerweise DG an dieser Stelle = 0. Es ist

$$DG = DF \cdot \begin{pmatrix} D\phi \\ \mathbf{1}_{n-p} \end{pmatrix}$$

 $DF\,$ ist eine Zeile, die wir wieder unterteilen in $\,DF=(u^t,v^t)\,.$ Dann folgt

(2)
$$u^t D\phi + v^t = 0 \text{ an der Stelle } a$$

An der Stelle a ist nun aber die Matrix A invertierbar. Deshalb finden wir aus (1) $D\phi = -A^{-1}B$ an der Stelle a. Dies eingesetzt in (2) ergibt

$$-u^t A^{-1}B + v^t = 0$$
 oder $DF = (u^t, v^t) = (u^t, u^t A^{-1}B) = u^t A^{-1}(A, B) = u^t A^{-1}Df$

an der Stelle a.

 $u^t A^{-1}$ ist eine Zeile mit p Komponenten, etwa $= (\lambda_1, ..., \lambda_p)$. Wir haben damit

$$DF(a) = (\lambda_1,, \lambda_p) Df(a)$$
, komponentenweise

$$\partial_i F(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_j \partial_i f_j(a)$$

Fassen wir zusammen: (Selbstredend sind alle beteiligte Funktionen stetig differenzierbar)

Satz 22. Wenn die Funktion F an der Stelle a ein lokales Extremum mit den Nebenbedingungen $f_1 = \dots = f_p = 0$ hat und wenn die Jacobimatrix von f an der Stelle a den Rang p hat, dann ist der Gradient von F an der Stelle a eine Linearkombination der Gradienten der f_i :

$$\operatorname{grad} F(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \operatorname{grad} f_i(a)$$

Die λ_i heißen die Lagrange-Multiplikatoren.

Beispiel: Sei A eine reelle symmetrische Matrix. Die stetige Funktion $F(x) = x^t A x$ nimmt auf der Einheitskugel $f(x) = x^t x - 1 = 0$ ihr Maximum an; etwa an der Stelle a. Es ist

$$Df = 2(x_1,, x_n) = 2x^t$$
 und $DF = 2x^t A$

Da $Df(a) \neq 0$ ist, kann man Satz 22 anwenden: es gibt λ mit

$$\operatorname{grad} F(a) = \lambda \operatorname{grad} f(a)$$
, in diesem Falle also

$$A a = \lambda a$$

11. Eigenwerte und direkte Zerlegung, Anwendung auf lineare Differentialgleichugen

Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix.

Definition: Die Zahl λ heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$(1) Av = \lambda v \text{ und } v \neq 0$$

 $v\,$ heißt ein zu $\,\lambda\,$ gehöriger Eigenvektor.

Beispiel: Ist A symmetrisch (und reell), so ist das Maximum von x^tAx auf der Einheitskugel ein Eigenwert von A. (Übrigens sieht man das auch ohne Kap 12, vgl. Aufgabe 38.)

Dieses Beispiel zeigt, daß jede reelle symmetrische Matrix A einen reellen Eigenwert besitzt: $Au = \lambda u$ und |u| = 1. Wir nehmen eine orthogonale Transformation, die den ersten Standardbasisvektor $e_1 \in \mathbb{R}^n$ in u überführt. Eine solche gibt es; ist $e_1 \neq u$, so leistet das etwa die Spiegelung T an der zu $u - e_1$ senkrechten Hyperebene:

$$Tx = x - 2\frac{(x, e_1 - u)}{|e_1 - u|^2} (e_1 - u); \quad Te_1 = u$$

Nun haben wir

$$ATe_1 = \lambda Te_1$$
; also $T^{-1}ATe_1 = \lambda e_1$

Die erste Spalte der Matrix $T^{-1}AT$ ist also $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Da T orthogonal, ist $T^{-1} = T^t$, und $T^{-1}AT = T^tAT$

ist wieder symmetrisch. Daher ist auch die erste Zeile von $T^{-1}AT$ gleich $(\lambda,0,...,0)$ und

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ mit } B^t = B$$

Nach Induktionsannahme gibt es eine orthogonale Matrix S und reelle $\lambda_2,...,\lambda_n$ mit

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Für

$$K := T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$
 und $\lambda_1 = \lambda$

gilt jetzt

$$K$$
 ist orthogonal und $K^{-1}AK = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Wir haben bewiesen

Satz 23. (Hauptachsentransformation) Zu jeder reellen symmetrischen Matrix A gibt es eine orthogonale Matrix K so daß

$$K^{-1}AK$$
 eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist.

Natürlich sind $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte der Diagonalmatrix. Wie wir gleich sehen werden (Lemma 1) sind sie auch die Eigenwerte von A.

Wir fahren fort bei Definition (1): Wie findet man Eigenwerte? Sei A eine beliebige $(n \times n)$ -Matrix. Die Definition von Eigenwert können wir so umformulieren:

$$\lambda$$
 ist Eigenwert $\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(A - \lambda \mathbf{1}) \neq 0$

Nach Kap 4 ist dies genau dann der Fall, wenn die Determinante von $A - \lambda \mathbf{1}$ null ist. Diese Determinante ist ein Polynom in λ ; es heißt das charakteristische Polynom χ_A :

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda \mathbf{1} - a| = \lambda^n - (\sum_{i=1}^n a_{ii})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n |A|$$

Die Eigenwerte von $\,A\,$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von $\,A\,$.

Definition: Der zweithöchste Koeffizient $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ heißt die Spur der Matrix A.

Lemma 1. Ist T invertierbar und A beliebig, so haben A und $T^{-1}AT$ dasselbe charakteristische Polynom (und also auch dieselben Eigenwerte).

Beweis:

$$\chi_{T^{-1}AT}(\lambda) = |\lambda \mathbf{1} - T^{-1}AT| = |T^{-1}(\lambda \mathbf{1} - A)T| = |T|^{-1}|\lambda \mathbf{1} - A| |T| = \chi_A(\lambda)$$

nach dem Determinantenmultiplikationssatz.

Das charakteristische Polynom eines Endomorphismus: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus (=lineare Abbildung in sich) von V. Man wähle eine Basis $v_1,...,v_n$ von V und schreibe

$$\phi v_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j, \quad i = 1, ..., n$$

Hätte man eine andere Basis gewählt, etwa $u_1, ..., u_n$, und wäre mit dieser

$$\phi u_i = \sum_{j=1}^n b_{ji} u_j,$$

so hätte man invertierbare Matrizen S un T mit

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} v_j, \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji} u_j \quad \text{und } ST = TS = \mathbf{1}$$

Man setzt ein:

$$\phi u_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} \phi v_j = \sum_{j,k} t_{ji} a_{kj} v_k = \sum_{j,k,l} t_{ji} a_{kj} s_{lk} u_l$$

Daraus liest man für die Matrizen A der a_{ij} und B der b_{ij} ab

$$B = T^{-1}AT$$

Nun sahen wir gerade, daß A und $T^{-1}AT$ dasselbe charakteristische Polynom haben. Dieses hängt also nur von dem Endomorphismus ϕ und nicht von der Basiswahl ab, man sagt deshalb, es ist das charakteristische Polynom von ϕ .

Man nennt zwei Matrizen A und B ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix T gibt, so daß $B = T^{-1}AT$. Merke: Beschreiben die Matrizen A und B denselben Endomorphismus von V bezüglich verschiedener Basen von V, so sind sie ähnlich.

Diese Betrachtungen kann man sich zunutze machen, um das charaktristische Polynom (und damit alle Eigenwerte) einer Matrix zu finden (vgl. Aufgabe 39)

Das nächste Ziel soll sein, Probleme zu verkleinern, indem man Vektorräume zerlegt (wie das gemeint ist, wird am Ende des Kapitels klar). Sei U ein Untervektorraum von V. Man wählt eine Basis $u_1,...,u_k$ von U. Mit Satz 4 (Basisergänzungssatz) ergänzt man sie zu einer Basis $u_1,...,u_k,u_{k+1},...,u_n$ von V. Dann sei W der von $u_{k+1},...,u_n$ aufgespannte Unterraum. Jeder Vektor $x \in V$ besitzt eine Darstellung

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n = u + w$$

mit $u \in U$ und $w \in W$, kurz: V = U + W. Da $u_1, ..., u_n$ linear unabhängig sind, ist diese Darstellung eindeutig, was man auch dadurch ausdrücken kann, daß $U \cap W = 0$.

Definition: Wenn V=U+W und $U\cap W=0$, dann nennt man V die direkte Summe von U und W und schreibt

$$V = U \oplus W$$

Den Basisergänzungssatz kann man also auch so aussprechen: Zu jedem Unterraum U von V gibt es einen Unterraum W so, daß $V = U \oplus W$ (W ist ein komplementärer direkter Summand zu U). Sehr wichtig ist der folgende Zerlegungssatz:

Satz 24. Sei ϕ ein Endomorphismus des Vektorraumes V und f ein Polynom mit $f(\phi) = 0$. Wenn man f in zwei teilerfremde Faktoren zerlegt hat: $f = g \cdot h$, so kann man V zerlegen in

$$V = V_a \oplus V_h$$
 mit

$$V_q = \{x \in V \mid g(\phi)x = 0\}, V_h \text{ entsprechend}$$

Beweis: Da g und h teilerfremd sind, gibt es Polynome u und v mit ug + vh = 1. In diese Polynomidentität setzt man ϕ ein:

$$u(\phi)g(\phi) + v(\phi)h(\phi) = id$$

Die Endomorphismen auf beiden Seiten wendet man auf einen beliebigen Vektor $x \in V$ an:

(1)
$$u(\phi)g(\phi)x + v(\phi)h(\phi)x = x$$

Da $g(\phi)h(\phi)=f(\phi)=0$, liegt der erste Summand in V_h und der zweite in V_g . Also ist $V=V_g+V_h$. Die Gleichung (1) zeigt aber auch, daß $V_g\cap V_h=0$ ist, also ist die Summe direkt.

Ist nun g oder h noch weiter in teilerfremde Faktoren zerlegbar, so kann man auch V noch weiter zerlegen. In \mathbb{C} kann man jedes Polynom in Linearfaktoren zerlegen. Deshalb betrachten wir für den Rest des Kapitels komplexe Vektorräume (statt wie bisher reeller). Fassen wir gleiche Nullstellen zusammen, so können wir jedes Polynom (dessen höchster Koeffizient 1 ist) im Komplexen so zerlegen:

$$f(X) = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_r)^{k_r}$$

Entsprechend ist nun V zerlegt:

$$V = V_1 \oplus \oplus V_r \text{ mit } V_i = \{x \in V \mid (\phi - \alpha_i)^{k_i} x = 0\}$$

Anwendung auf die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Sei Ω der komplexe Vektorraum aller komplexwertigen unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf der reellen Achse, a_i gegebene Konstanten ($\in \mathbb{C}$) und

(1)
$$V = \{ y \in \Omega \mid y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \}$$

Weil "Differenzieren" linear ist (und auf der rechten Seite eine 0 steht), ist V ein Vektorraum (über $\mathbb C$). Die Abbildung, die jeder Funktion y ihre Ableitung y' zuordnet, ist ein Endomorphismus von V. Wir bezeichnen diesen mit D. Sei f das Polynom

$$f(X) = X^{n} + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_{1}X + a_{0}$$

Auf V ist nach Definition f(D) = 0. Ist

$$f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{k_i}$$

die Zerlegung von f in Linearfaktoren, so ist nach dem Zerlegungssatz

$$V = V_1 \oplus \oplus V_r \text{ mit } V_i = \{ y \mid (D - \alpha_i)^{k_i} y = 0 \}$$

Statt der Differentialgleichung f(D)y = 0 müssen wir also nur noch die Differentialgleichungen

$$(D - \alpha_i)^{k_i} y = 0$$

lösen. Das ist aber ganz einfach mit

Lemma 2.

$$(D - \alpha)^k y = e^{\alpha x} D^k (e^{-\alpha x} y)$$

Beweis: Da D mit α vertauschbar ist, kann man links die binomische Formel anwenden. Rechts wendet man die Leibnizsche Formel zur k-fachen Ableitung eines Produkts von zwei Funktionen an. Dabei kommt dasselbe raus.

Nach Lemma 2 ist nun

$$(D-\alpha)^k y = 0 \Leftrightarrow D^k(e^{-\alpha x}y) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha x}y$$
 ist ein Polynom vom Grad $< k$

Nimmt man alles zusammen, so kommt

Satz 25. Die Lösungen der Differentialgleichung (1) sind genau alle

$$y = P_1(x)e^{\alpha_1 x} + \dots + P_r(x)e^{\alpha_r x}$$
 mit Polynomen P_i vom Grad $\langle k_i \rangle$

Insbesondere bilden die komplexwertigen Lösungen der Differentialgleichung f(D)y=0 einen n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb C$.

Beispiel: n = 2 (Schwingungsgleichung)

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$f(X) = X^2 + aX + b$$
 mit den Nullstellen $\alpha_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

1. Fall: $\frac{a^2}{4} - b \neq 0$. Dann ist $\alpha_1 \neq \alpha_2$, die P_i sind konstant, und die (komplexwertigen) Lösungen sind genau alle

$$\lambda e^{\alpha_1 x} + \mu e^{\alpha_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

2. Fall: $\frac{a^2}{4}=b$. Dann ist $\alpha=-\frac{a}{2}$ die einzige Nullstelle, k=2 und P_1 ist ein Polynom ersten Grades. Die Lösungen sind genau alle

$$e^{-\frac{a}{2}x}(\lambda + \mu x)$$

Sind die Koeffizienten a und b reell, so mag man sich für reellwertige Lösungen interessieren. Dann muß man unterscheiden:

Fall 1a) $\frac{a^2}{4} - b > 0$. Dann sind α_1, α_2 beide reell, und die reellwertigen Lösungen sind alle

$$\lambda e^{\alpha_1 x} + \mu e^{\alpha_2 x} \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Fall 1b) $\frac{a^2}{4}-b<0$, etwa $=-\omega^2$ mit reellem ω . Die komplexwertigen Lösungen sind alle

$$\lambda e^{\left(-\frac{a}{2}+i\omega\right)x} + \mu e^{\left(-\frac{a}{2}-i\omega\right)x} = e^{-\frac{a}{2}x} \{ (\lambda + \mu)\cos\omega x + i(\lambda - \mu)\sin\omega x \}$$

Die reellwertigen unter ihnen sind genau diejenigen, für die $\lambda + \mu$ und $i(\lambda - \mu)$ reell sind (also $\lambda = \bar{\mu}$). Die reellwertigen Lösungen sind also genau alle

$$e^{-\frac{a}{2}x}(\lambda\cos\omega x + \mu\sin\omega x) \text{ mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Mit der Zerlegungsmethode aus Satz 24 kann man sogar die inhomogene Gleichung

$$f(D)y = h(x)$$

lösen. Nämlich: Ist $f=\prod p_i$ mit paarweise teilerfremden p_i , so sei Q_i der Komplementärfaktor zu p_i : $f=p_iQ_i$. Aus p_i und Q_i kann man 1 kombinieren:

$$1 = u_i p_i + v_i Q_i$$

Multipliziert man alle diese Einsen zusammen, so erhält man (auf mannigfache Weise) eine Darstellung

$$1 = w_1 Q_1 + + w_1 Q_r$$
 mit Polynomen $w_1, ..., w_r$

Sei y beliebig. Für $y_i := w_i(D)Q_i(D)y$ gilt $y = y_1 + ... + y_r$, und

(1)
$$f(D)y = h \Leftrightarrow p_i(D)y_i = w_i(D)h \text{ für } i = 1, ..., r$$

Es war $p_i(D) = (D - \alpha_i)^{k_i}$. Aus (1) und Lemma 2 folgt, daß f(D)y = h gleichbedeutend ist mit

$$D^{k_i}(e^{-\alpha_i x}y_i) = e^{-\alpha_i x}w_i(D)h \text{ für } i = 1, ..., r$$

Das letzte bedeutet; $e^{-\alpha_i x} y_i$ ist k_i -fache Stammfunktion von $e^{-\alpha_i x} w_i(D) h$.

Eine k-fache Stammfunktion einer beliebigen (stetigen) Funktion g läßt sich angeben in der Gestalt

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} g(t) dt$$

(Für k=1 ist das der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Das Ergebnis ist

Satz 26. Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(D)y = h$$

ist

$$y(x) = \sum_{i=1}^{r} e^{\alpha_i x} \int_0^x e^{-\alpha_i t} \frac{(x-t)^{k_i-1}}{(k_i-1)!} [w_i(D)h](t) dt$$

Beispiel:

$$y'' + y = \cos x$$

$$f(X) = X^2 + 1, \quad p_1 = X + i, \quad p_2 = X - i, \quad Q_1 = X - i, \quad Q_2 = X + i$$

$$-\frac{1}{2i}(Q_1 - Q_2) = 1, \text{ also } w_1 = -w_2 = -\frac{1}{2i}$$

$$y_1 = e^{-ix} \int_0^x e^{it} \cdot \frac{-1}{2i} \cos t \, dt$$

Auswertung des Integrals ergibt

$$y_1 = \frac{i}{4}\sin x - \frac{x}{4i}e^{-ix}$$

 y_2 entsteht aus $\,y_1\,,$ indem man $\,i\,$ durch $\,-i\,$ ersetzt. Danach wird

$$y = y_1 + y_2 = \frac{x}{2}\sin x$$

Insbesondere ist

$$y(\frac{4n+1}{2}\pi) = \frac{4n+1}{4}\pi \to \infty \text{ für } n \to \infty$$

Resonanz

12. Jordansche Normalform, Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Ist A eine Matrix und $||A||_{\infty} := \max_{i,j} |a_{ij}| = m$, so ist

$$||A^2||_{\infty} = \max_{i,j} |\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}| \le n \cdot m^2$$

allgemein

$$(1) ||A^k||_{\infty} \le n^{k-1} m^k \le (nm)^k$$

Sei $a_{ij}^{(k)}$ der Eintrag Nr. (i,j) in der Matrix A^k . Aus (1) folgt, daß die Reihen $\sum_{k\geq 0} \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}$ die Majorante $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (nm)^k = e^{nm}$ besitzen. Also sind sie alle konvergent. Die Matrix, die diese Reihenwerte als Einträge hat, wird mit e^A bezeichnet:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

wobei, wie eben beschrieben, die Konvergenz eintragsweise zu verstehen ist.

Beispiele: 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$A^k = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ A & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es ist also

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \cdot A$$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Offenbar ist $A^2 = 0$, also

$$e^A = \mathbf{1} + A$$

Lemma 1. Sind A und B vertauschbare Matrizen, so ist

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Beweis: Wenn AB=BA, so kann man die binomische Formel $(A+B)^k=\sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu}A^{\nu}B^{k-\nu}$ anwenden und der Beweis läuft wie im eindimensionalen Fall durch Multiplikation der Potenzreihen (Cauchy-Produkt).

Beispiel. Für $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ ist $AB\neq BA$ und

$$e^A e^B = (\mathbf{1} + A)(\mathbf{1} + B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und das ist nicht dasselbe wie e^{A+B} (siehe Beispiel 1).

Ist A eine Matrix, deren Einträge a_{ij} Funktionen einer reellen Variablen t sind, so bezeichnet man mit A' die Matrix mit den Einträgen $a'_{ij}(t)$. Aus der Produktregel für Funktionen einer reellen Variablen folgt sofort

$$(AB)' = A'B + AB'$$

Dabei ist aber auf die Reihenfolge zu achten! Es gilt nämlich

(1)
$$(A^m)' = A'A^{m-1} + AA'A^{m-2} + \dots + A^{m-2}A'A + A^{m-1}A'$$

und das ist nicht dasselbe mie $mA^{m-1}A'$.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & f \\ g & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$(A^2)' = \begin{pmatrix} f'g + fg' & 0\\ 0 & f'g + fg' \end{pmatrix}$$

und das ist nur dann dasselbe wie 2AA', wenn fg'=gf', also $\frac{f}{g}$ konstant ist.

Der Ausdruck (1) ist $= mA^{m-1}A'$, wenn A mit A' vertauschbar ist. Dies ist der Fall für Matrizen $A \cdot t$, wenn A eine konstante Matrix ist. Daher gilt für

$$Y(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

daß

(2)
$$Y'(t) = A \cdot e^{At} = A \cdot Y(t)$$

Lemma 2. Jede Lösung der Gleichung (2) hat die Gestalt $e^{At} C$ mit einer konstanten Matrix C.

Beweis: Sei $Y(t)=e^{At}$ und Z eine beliebige Matrix mit Z'=AZ. Nach Lemma 1 ist $e^{-At}e^{At}=\mathbf{1}$, also Y(t) invertierbar. Aus $Y^{-1}Y=\mathbf{1}$ folgt

$$(Y^{-1})'Y + Y^{-1}Y' = 0$$
, also $(Y^{-1})' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}$

Damit ist

$$(Y^{-1}Z)' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}Z + Y^{-1}Z' = Y^{-1} \{-AY \cdot Y^{-1}Z + AZ\} = 0$$

Das bedeutet, daß $Y^{-1}Z$ konstant ist, etwa = C, und das war die Behauptung.

Gegeben sei ein System von linearen Differentialgleichnungen mit konstanten Koeffizienten a_{ij} :

Dieses kann man auch kurz schreiben in der Form

$$z' = A z$$

wobei A eine gegebene konstante Matrix und z eine gesuchte Spalte ist. Ist z' = Az, so gilt für die Matrix

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ z_n & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Z' = AZ. Sie hat also die Gestalt $Z = e^{At}C$ mit konstanter Matrix C, und daraus folgt

Satz 27. Die Lösungen des Systems z' = Az sind genau die

$$z(t) = e^{At} c$$
 mit konstanter Spalte c

Insbesondere folgt: Die reell- (komplex)-wertigen Lösungen z des Systems (3) bilden einen n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb R$ bzw. über $\mathbb C$.

Es entsteht die Aufgabe, e^{At} zu berechnen. Mit der Definition $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ ist das i.a. ein hoffnungsloses Unterfangen. Aber stellen wir uns zum Beispiel vor, A wäre eine Diagonalmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Dann ist einfach

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Was kann man im allgemeinen tun? Zuerst verfeinern wir Satz 24: Sei wie dort V ein Vektorraum über $\mathbb C$ und ϕ ein Endomorphismus von V. Sei f ein Polynom mit $f(\phi)=0$ (ein solches gibt es immer). Man zerlegt f so weit wie möglich in teilerfremde Faktoren:

$$f(X) = (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_r)^{k_r}$$

Dann ist nach Satz 24

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r \text{ mit } V_i = \{x \in V \mid (\phi - \alpha_i)^{k_i} x = 0\}$$

Definition: Ein Endomorphismus ϕ eines Vektorraumes V heißt nilpotent, wenn es einen Exponenten k gibt so daß $\phi^k=0$. Analog heißt eine Matrix A nilpotent, wenn $A^k=0$ für ein passendes k.

Die Einschränkung von $\phi - \alpha_i$ auf V_i ist also nilpotent!

Für $A = \alpha \mathbf{1} + nilpotent$ ist nun e^A schon wesentlich leichter zu berechnen:

$$e^{\alpha \mathbf{1} + N} = e^{\alpha} (\mathbf{1} + N + \frac{1}{2}N^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1})$$
 wenn $N^k = 0$

Aber damit sind wir noch nicht zufrieden. Wir betrachten genauer einen Vektorraum V mit einem nilpotenten Endomorphismus ϕ . Sei k der früheste Exponent, für den $\phi^k=0$, d.h. ϕ^{k-1} ist $\neq 0$. Offenbar ist

$$0 \subset \operatorname{Kern} \phi \subset \operatorname{Kern} \phi^2 \subset \dots \subset \operatorname{Kern} \phi^{k-1} \subset \operatorname{Kern} \phi^k = V$$

Nach dem Basisergänzungssatz (vgl. auch Kap 11) gibt es einen Unterraum A_1 so daß

$$V = \operatorname{Kern} \phi^{k-1} \oplus A_1$$

Aus $A_1 \cap \operatorname{Kern} \phi^{k-1} = 0$ folgt $\phi A_1 \cap \operatorname{Kern} \phi^{k-2} = 0$, und es gilt

$$\phi A_1 \oplus \operatorname{Kern} \phi^{k-2} \subset \operatorname{Kern} \phi^{k-1}$$

Es gibt A_2 mit

$$\operatorname{Kern} \phi^{k-1} = \operatorname{Kern} \phi^{k-2} \oplus \phi A_1 \oplus A_2$$

Die Summe

$$\operatorname{Kern} \phi^{k-3} + \phi^2 A_1 + \phi A_2$$
 ist direkt und $\subset \operatorname{Kern} \phi^{k-2}$

Es gibt A_3 mit

$$\operatorname{Kern} \phi^{k-2} = \operatorname{Kern} \phi^{k-3} \oplus \phi^2 A_1 \oplus \phi A_2 \oplus A_3$$

allgemein

$$\operatorname{Kern} \phi^{k-s} = \operatorname{Kern} \phi^{k-s-1} \oplus \phi^s A_1 \oplus \phi^{s-1} A_2 \oplus \ldots \oplus A_{s+1}$$

schließlich für s = k - 1 mit $\operatorname{Kern} \phi^0 = 0$

$$\operatorname{Kern} \phi = \phi^{k-1} A_1 \oplus \phi^{k-2} A_2 \oplus \dots \oplus A_k$$

Setzt man alles zusammen, so erhält man

$$V = (A_1 \oplus \phi A_1 \oplus \ldots \oplus \phi^{k-1} A_1) \oplus (A_2 \oplus \ldots \oplus \phi^{k-2} A_2) \oplus \ldots \oplus (A_{k-1} \oplus \phi A_{k-1}) \oplus A_k$$

Sei nun $u_1, ... u_m$ eine Basis von A_1 . Dann sind die $\phi^i u_j$ für $0 \le i < k$ und $1 \le j \le m$ linear unabhängig; denn angenommen

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} \phi^i u_j = 0$$

Dann wendet man auf diese Summe $\,\phi^{k-1}\,$ an, und wegen $\,\phi^k=0\,$ erhält man

$$\sum_{j} \lambda_{0j} \phi^{k-1} u_j = 0$$

Das bedeutet, daß $\sum_j \lambda_{0j} u_j \in \operatorname{Kern} \phi^{k-1}$. Da aber $A_1 \cap \operatorname{Kern} \phi^{k-1} = 0$, folgt $\sum_j \lambda_{0j} u_j = 0$, und daraus folgt $\lambda_{0j} = 0$ für alle j, weil die u_j eine Basis von A_1 bilden. Nun ist von der ursprünglichen Summe nur noch $\sum_{i \geq 1} \sum_j \lambda_{ij} \phi^i u_j = 0$ übrig. Hierauf wendet man ϕ^{k-2} an usw. und erhält schließlich, daß alle $\lambda_{ij} = 0$ sein müssen.

Der Raum $A_1 \oplus \phi A_1 \oplus \oplus \phi^{k-1} A_1$ besitzt also die Basis

$$u_1, \phi u_1, ..., \phi^{k-1}u_1, u_2, ..., \phi^{k-1}u_2, ..., u_m, ..., \phi^{k-1}u_m$$

Ebenso besitzt der Raum $A_2 \oplus \phi A_2 \oplus \oplus \phi^{k-2} A_2$ mit $\phi^{k-1} A_2 = 0$ eine Basis

$$v_1, \phi v_1, \dots, \phi^{k-2} v_1, \dots, v_p, \dots, \phi^{k-2} v_p$$

Auf diese Weise ist der Raum V mit nilpotentem Endomorphismus ϕ direkt zerlegt in Unterräume des Typs

$$W = \langle w, \phi w, \phi^2 w,, \phi^{l-1} w \rangle \text{ mit } \phi^l w = 0$$

 $(1 \le l \le k)$.

Definition: Ein Raum dieses Typs heißt ϕ -zyklisch.

Kehren wir zu unserm ursprünglichen Problem zurück: Gegeben war ein Vektorraum mit Endomorphismus ϕ . Wir hatten V direkt zerlegt:

$$V = V_1 \oplus \oplus V_r$$
,

und wir hatten Zahlen $\alpha_1, ..., \alpha_r$ so, daß

$$\phi - \alpha_i$$
 nilpotent auf V_i

Wie wir jetzt sahen, kann man jedes V_i in eine direkte Summe von Unterräumen U zerlegen, deren jeder eine Basis

$$u, (\phi - \alpha_i)u, \dots, (\phi - \alpha_i)^{s-1}u$$
 mit $(\phi - \alpha_i)^s u = 0$

besitzt. Setzt man

$$(\phi - \alpha_i)^{s-1}u = v_1, (\phi - \alpha_i)^{s-2}u = v_2, \dots, (\phi - \alpha_i)u = v_{s-1}, u = v_s,$$

so bilden $v_1,...,v_s$ ebenfalls eine Basis von U, und bezüglich dieser Basis wird ϕ in U so dargestellt:

$$\begin{aligned}
\phi v_1 &= \alpha_i v_1 \\
\phi v_2 &= v_1 + \alpha_i v_2 \\
\phi v_3 &= v_2 + \alpha_i v_3 \\
\vdots \\
\phi v_s &= v_{s-1} + \alpha_i v.
\end{aligned}$$

Die Matrix, die dies beschreibt, ist (wenn wir α statt α_i schreiben) vom Typ

$$J_{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

Der Gesamtraum V ist in eine direkte Summe zerlegt, so daß in jedem Summanden ϕ durch eine Matrix vom Typ J_{α} beschrieben werden kann. Es folgt

Satz 28. Jeder komplexe Vektorraum mit Endomorphismus ϕ besitzt eine Basis, bezüglich der ϕ durch eine Matrix vom Typ

$$J = \begin{pmatrix} J_{\alpha} & & & \\ & J_{\beta} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda} \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Dasselbe in Matrizensprache: Zu jeder komplexen $(n \times n)$ -Matrix A gibt es eine invertierbare Matrix T so, daß

$$(J) T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_{\alpha} & & & \\ & J_{\beta} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda} \end{pmatrix}$$

Die J_{α} heißen Jordankästchen, und (J) heißt die **Jordansche Normalform** (von A).

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist

$$X^2 - 12X + 36 = (X - 6)^2$$

Einziger Eigenwert ist 6. Da A kein Vielfaches der Einheitsmatrix ist, kann die Jordansche Normalform nur so aussehen:

$$J = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wir haben bewiesen, daß man jede Matrix auf Jordansche Normalform transformieren kann. Wir haben jedoch nicht bewiesen, daß diese im wesentlichen eindeutig ist. Die Zahlen auf der Diagonalen sind natürlich die Eigenwerte und als solche durch A bestimmt. Aber wie oft ein jeder von ihnen vorkommt und wie groß die Jordankästchen sind (d.h. wieviele Einsen in der Nebendiagonalen sind), ist auch durch A bestimmt, und das haben wir nicht bewiesen.

Anwendung auf Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten: Gegeben ist das System

$$z'(t) = A \cdot z(t)$$

Schreibe

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} J_{\alpha} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda} \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen in die Exponentialreihe entsteht

$$e^{At} = e^{TJT^{-1}t} = Te^{Jt}T^{-1} = T\begin{pmatrix} e^{J_{\alpha}t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_{\lambda}t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

mit

$$e^{J_{\alpha}t} = e^{t(\alpha \mathbf{1} + N)} = e^{\alpha t} (\mathbf{1} + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \dots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}N^{l-1}) \text{ wenn } N^l = 0$$

ausgeschrieben

$$e^{J_{\alpha}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ & 1 & t & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & t & \frac{t^2}{2} \\ & & & 1 & t \end{pmatrix}$$

Der Satz 28 liefert uns folgende Prozedur zur Lösung von z' = Az:

- 1. Man finde die Jordansche Normalform J von A.
- 2. Man finde eine Matrix T mit $T^{-1}AT = J$.
- 3. Die Lösungen von z' = Az sind genau alle

$$z(t) = T \cdot e^{Jt} \cdot c$$

mit konstanter Spalte c.

Beispiel: Löse das System

$$x' = 8x + y$$
$$y' = -4x + 4y$$

Die Jordansche Normalform der Matrix $A=\begin{pmatrix}8&1\\-4&4\end{pmatrix}$ war $J=\begin{pmatrix}6&1\\0&6\end{pmatrix}$. Um T zu finden, muß man AT=TJ lösen. Das ist ein lineares Gleichungssystem für die Spalten von T. Eine Lösung ist $T=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$. Die Lösungen z sind also alle

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^t} \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{6t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot c$$

Ist $c = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, so erhält man die sämtlichen Lösungen in der Gestalt

$$\begin{array}{rcl} x & = & e^{6t} & (\lambda & + & \mu t) \\ y & = & e^{6t} & (\mu - 2\lambda & - & 2\mu t) \end{array} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

13. Spektralsatz

Der Spektralsatz ist eine Erweiterung des Satzes 23 über die Hauptachsentransformation und spielt statt in reellen Euklidischen Vektorräumen in komplexen unitären Vektorräumen:

V sei ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb C$. Auf V sei eine hermitesche Form gegeben, die wir in Anlehnung an das Skalarprodukt in reellen Euklidischen Räumen ebenfalls mit $(\ ,\)$ bezeichnen. Per definitionem ist $(\ ,\)$ eine Abbildung von $V\times V$ nach $\mathbb C$ mit

- 1. (x,y) ist bei festem x additiv in y und bei festem y additiv in x.
- 2. $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3. $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (konjugiert komplex) für alle x,y; insbesondere ist (x,x) stets reell.

Aus 2. und 3. folgt $(\lambda x, y) = \bar{\lambda}(x, y)$. Zusätzlich zu 1,2,3 soll die Form positiv definit sein:

4.
$$(x,x) > 0$$
 für alle $x \neq 0$. Man setzt $\sqrt{(x,x)} = |x|$ (positive Quadratwurzel)

Definition: Eine komplexer Vektorraum mit einer Form (,), welche die Eigenschaften 1,2,3,4 besitzt, heißt ein unitärer Vektorraum.

Wie im Euklidischen gilt die Schwarzsche Ungleichung: Für alle $x,y\in V$ und alle $\lambda\in\mathbb{C}$ gilt

$$0 \le (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \lambda(x, y) + \bar{\lambda}(y, x) + |\lambda|^2(y, y) = (y, y) \cdot |\lambda + \frac{(y, x)}{(y, y)}|^2 - \frac{(x, y)(y, x)}{(y, y)} + (x, x) + |\lambda|^2(y, y) = (y, y) \cdot |\lambda + \frac{(y, x)}{(y, y)}|^2 + |\lambda|^2(y, y) = (y, y) \cdot |\lambda + \frac{(y, x)}{(y, y)}|^2 + |\lambda|^2(y, y) = (y, y) \cdot |\lambda + \frac{(y, x)}{(y, y)}|^2 + |\lambda|^2(y, y) = (y, y) \cdot |\lambda + \frac{(y, x)}{(y, y)}|^2 + |\lambda|^2(y, y) = (y, y) \cdot |\lambda + \frac{(y, x)}{(y, y)}|^2 + |\lambda|^2(y, y) = (y, y) \cdot |\lambda|^2(y, y) + |\lambda|^2(y, y) = (y, y) \cdot |\lambda|^2(y, y) + |\lambda|^$$

Wählt man λ so, daß der erste Ausdruck 0 wird, so folgt

$$(x,y)(y,x) \le (x,x)(y,y)$$
 oder $|(x,y)| \le |x||y|$ (Cauchy-Schwarz)

Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt wie früher die Dreiecksungleichung

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Standardbeispiel: $V = \mathbb{C}^n$ mit $(x, y) = \bar{x}^t y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$.

Man nennt zwei Vektoren x,y orthogonal, wenn (x,y)=0. Ein System paarweise orthogonaler Vektoren mit $|v_i|=1$ nennt man ein Orthonormalsystem. Eine Basis $v_1,...,v_n$ von V, welche gleichzeitig ein Orthonormalsystem ist, nennt man eine Orthonormalsystem.

Sei $v_1, ..., v_n$ irgendeine Basis von V und $a_{ij} = (v_i, v_j)$. Die Matrix A ist invertierbar; denn sonst hätte das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \lambda_j = 0, \quad i = 1, ..., n$$

eine nicht triviale Lösung λ_j . Dann hätte der Vektor $v = \sum_j \lambda_j v_j$ die Eigenschaft $(v_i, v) = 0$ für alle i. Dann wäre aber (z, v) = 0 für alle z, insbesondere für z = v. Aber aus (v, v) = 0 würde doch v = 0 folgen.

Sei B die Matrix mit $\bar{B}^t = A^{-1}$. Für die Vektoren

$$v_i^* = \sum_{j=1}^n b_{ji} v_j$$

gilt dann

$$(v_i^*, v_k) = (\sum_j b_{ji} v_j, v_k) = \sum_j \bar{b}_{ji} a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man nennt $v_1^*,....,v_n^*$ die zu $v_1,.....,v_n$ duale Basis. Ihr Nutzen ist

Lemma 1. Zu jeder Linearform $f: V \to \mathbb{C}$ gibt es einen Vektor a so daß

$$f(x) = (a, x)$$
 für alle $x \in V$

Beweis: Setze $a = \sum_i \overline{f(v_i)} v_i^*$. Dann ist $(a, v_k) = f(v_k)$ für alle k. Da die Form $(\ ,\)$ linear im zweiten Argument und f linear ist, gilt dann (a, x) = f(x) für alle x.

Jetzt sei ϕ ein Endomorphismus von V. Dann ist für jedes feste $b \in V$ die Abbildung $x \mapsto (b, \phi x)$ linear. Nach Lemma 1 gibt es einen Vektor $a \in V$ mit $(b, \phi x) = (a, x)$ für alle $x \in V$. Offensichtlich ist a durch b bestimmt.

Definition: Die Abbildung, die dem b das a (wie beschrieben) zuordnet, heißt die zu ϕ adjungierte Abbildung und wird mit ϕ^* bezeichnet. Sie ist also definiert durch

$$(\phi^*x, y) = (x, \phi y)$$
 für alle $x, y \in V$

Behauptungen:

1. ϕ^* ist linear.

Beweis: "additiv" ist klar. Weiter

$$(\phi^*(\lambda x), y) = (\lambda x, \phi y) = \bar{\lambda}(x, \phi y) = \bar{\lambda}(\phi^* x, y) = (\lambda \phi^* x, y)$$

2. $(\phi \psi)^* = \psi^* \phi^*$

Beweis:

$$((\phi \psi)^* x, y) = (x, \phi \psi y) = (\phi^* x, \psi y) = (\psi^* \phi^* x, y)$$

3. $(\phi^*)^* = \phi$

Beweis:

$$((\phi^*)^*x, y) = (x, \phi^*y) = \overline{(\phi^*y, x)} = \overline{(y, \phi x)} = (\phi x, y)$$

Standardbeispiel: $V = \mathbb{C}^n$ mit $(x,y) = \bar{x}^t y$. Die Endomorphismen des \mathbb{C}^n werden gegeben durch Multiplikation der Spalten von links mit n-reihigen Matrizen:

$$\phi x = A x$$

 ϕ^* ist definiert durch $\overline{(\phi^*x)}^t y = \bar{x}^t A y$ für alle x,y. Wir wissen schon, daß ϕ^* linear, also auch gegeben durch eine Matrix: $\phi^*x = Bx$. Dafür muß nun gelten $\overline{Bx}^t y = \bar{x}^t A y$. Das bedeutet $\bar{B}^t = A$. Ergebnis: Im \mathbb{C}^n mit der Standardform $\bar{x}^t y$ gilt

$$\phi x = A x \Leftrightarrow \phi^* x = \bar{A}^t x$$

Deshalb nennt man auch

$$A^* := \bar{A}^t$$
 die zu A adjungierte Matrix

Ein Endomorphismus ϕ von V heißt normal, wenn

$$\phi\phi^* = \phi^*\phi$$

Lemma 2. Ist ϕ normal und $\phi v = 0$, so ist auch $\phi^* v = 0$.

Beweis:

$$(\phi^* v, \phi^* v) = (v, \phi \phi^* v)$$
 nach Definition von *
$$= (v, \phi^* \phi v) \text{ weil } \phi \text{ normal}$$

$$= 0 \text{ weil } \phi v = 0$$

Für eine komplexe Zahl α ist offenbar die zur Multiplikation mit α adjungierte Abbildung die Multiplikation mit $\bar{\alpha}$. Wenden wir Lemma 2 auf $\phi - \alpha$ an Stelle von ϕ an, so erhalten wir:

Ist ϕ normal und $\phi v = \alpha v$, so ist $\phi^* v = \bar{\alpha} v$.

Satz 29. (Spektralsatz) Ist V ein unitärer n-dimensionaler Vektorraum und ϕ ein normaler Endomorphismus von V, so besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von ϕ .

Beweis: Da jedes nicht konstante Polynom in $\mathbb C$ eine Nullstelle hat, besitzt ϕ einen Eigenwert α :

$$\phi v = \alpha v$$
, ohne Einschränkung $|v| = 1$

Jeden Vektor $x \in V$ kann man zerlegen:

$$x = (v, x)v + [x - (v, x)v]$$

Nach Konstruktion ist der zweite Summand senkrecht auf v. Die Zerlegung zeigt, daß

$$V = < v > \oplus v^{\perp}$$

und daß das Orthokomplement

$$v^{\perp} := \{ x \in V \mid (v, x) = 0 \}$$

von v die Dimension n-1 hat. Wir zeigen, daß es bei ϕ in sich abgebildet wird: Ist (x,v)=0, so ist

$$(\phi x, v) = (x, \phi^* v) = (x, \bar{\alpha} v) = \bar{\alpha}(x, v) = 0$$

also in der Tat auch $\phi x \in v^{\perp}$. Nach Induktionsannahme besitzt v^{\perp} eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Setzt man diese mit v zusammen, so erhält man eine solche für V.

Umformulierung in Matrizensprache: Der Übergang von der Standardbasis zu einer andern Orthonormalbasis wird durch eine Matrix U bewirkt, deren Spalten ein Orthonormalsystem bilden. Dies kann man zusammenfassen in

$$\bar{U}^t U = \mathbf{1}$$

Definition: Eine Matrix U mit der Eigenschaft (U) heißt unitär.

Der Spektralsatz lautet in Matrizensprache also

Satz 29'. Zu jeder normalen Matrix A gibt es eine unitäre Matrix U so, daß

$$\bar{U}^t A U = U^{-1} A U = D$$
 diagonal

Bemerkung: Die normalen Matrizen sind die einzigen, die sich unitär diagonalisieren lassen; denn wenn U unitär und $A=UD\bar{U}^t$, so ist

$$A A^* = UDU^{-1}U\bar{D}U^{-1} = UD\bar{D}U^{-1} = U\bar{D}DU^{-1} = A^*A$$

Spezielle Typen von normalen Matrizen:

- 1. $A=A^*$: Solche A heißen hermitesch. Dann ist auch $D=D^*=\bar{D}$: Alle Eigenwerte von A (das sind ja die Diagonalglieder von D) sind reell.
- 2. A unitär: Dann ist auch D unitär, das heißt $\bar{D}D = \mathbf{1}$. Das bedeutet: Die Eigenwerte von A haben alle den Betrag 1.
- 3. A reell und schiefsymmetrisch: $A = \bar{A} = -A^t$. Aus $A + \bar{A}^t = 0$ folgt dasselbe für D, also $D + \bar{D} = 0$. Das bedeutet: Die Eigenwerte von A sind alle rein imaginär.

14. Fourierreihen

Sei V der komplexe Vektorraum aller komplexwertigen stetigen 2π -periodischen Funktionen auf $\mathbb R$. Man versieht V mit der hermiteschen Form

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(x)g(x) dx$$

Offensichtlich ist (\cdot,\cdot) eine hermitesche Form im Sinne von Kap 13, und sie ist auf V auch positiv definit, denn wenn f stetig und $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 0$, dann ist f = 0 (leichte Übung).

Definition: Die positive Wurzel $\sqrt{(f,f)}=:|f|_2$ heißt die 2-Norm von f.

Nach Kap 13 gilt für (f,g) die Schwarzsche Ungleichung und für die 2-Norm die Dreiecksungleichung.

Die Funktionen $e_n(x) := e^{inx}$ bilden ein Orthonormalsystem; denn

$$(e_m, e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imx + inx} dx = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n = m \\ \frac{2\pi}{0} & \frac{e^{-imx + inx}}{-im + in} = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei T_n der von den Funktionen $e_i(x)$ mit $|i| \leq n$ aufgespannte Unterraum von V. Für jedes $g \in T_n$ gilt

$$(f - \sum_{|i| \le n} (e_i, f) e_i, g) = 0$$

denn diese Gleichung gilt offensichtlich für die e_i . Daher ist

$$|f - g|_2^2 = |f - \sum_{|i| \le n} (e_i, f)e_i|_2^2 + |\sum_{|i| \le n} (e_i, f)e_i - g|_2^2 \ge |f - \sum_{|i| \le n} (e_i, f)e_i|_2^2$$

Folgerung: Die

$$c_n = (e_n, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx$$

lösen das Minimalproblem

$$|f - \sum_{|i| \le n} c_i e_i|_2 \le |f - \sum_{|i| \le n} a_i e_i|_2$$
 für alle $a_i \in \mathbb{C}$

Definition: Die c_n heißen die Fourierkoeffizienten von f, und

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

heißt die Fouriersche Reihe von f.

Eine kleine Rechnung ergibt

(1)
$$0 \le |f - \sum_{|i| \le n} c_i e_i|_2^2 = |f|_2^2 - \sum_{|i| \le n} |c_i|^2 \text{ für alle } n$$

und daraus folgt:

Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ konvergiert, und

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2\leq |f|_2^2 \qquad \qquad \text{Besselsche Ungleichung}$$

Wenn in der Besselschen Ungleichung sogar das Gleichheitszeichen gilt (zum Beispiel für stetige Funktionen, wie wir bald sehen werden), dann zeigt (1), daß $|f - \sum_{|i| \le n} c_i e_i|_2 \to 0$ für $n \to \infty$. Man sagt: Die Reihe $\sum_n c_n e^{inx}$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f.

Eine völlig andere Frage ist, ob sie punktweise konvergiert, das heißt ob

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = f(x) \text{ für alle (oder für welche ?) } x$$

Daß eine Reihe konvergiert, bedeutet bekanntlich, daß die Folge ihrer Anfangssummen konvergiert. Bei $\sum_{-\infty}^{\infty}$ kann man streiten, ob man meint, daß \sum_{0}^{∞} und $\sum_{-\infty}^{0}$ beide existieren sollen oder wie sonst der Grenzübergang stattfinden soll. Man einigt sich darauf:

Die Fourierreihe konvergiert an der Stelle $\,x\,$, wenn

(2)
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{|i| \le n} c_i e_i(x) \text{ existient}$$

Es zeigt sich, daß die Stetigkeit von f nicht hinreicht, um die Konvergenz der Fourierreihe zu beweisen, wohl aber kann man für stetige Funktionen die Konvergenz der Fourierreihe "im Sinne von Cesaro" beweisen:

Definition: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt Cesaro-konvergent, wenn die Folge der arithmetischen Mittel

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

konvergiert.

Lemma 1. Jede konvergente Folge ist erst recht Cesaro-konvergent, und zwar zum selben Grenzwert.

Beweis: Sei $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. Sei $\epsilon>0$ gegeben. Dazu gibt es k mit $|a_i-a|<\epsilon$ für alle i>k. Dann gilt für alle n>k

$$|b_n - a| = \frac{1}{n}|(a_1 - a) + (a_2 - a) + \dots + (a_n - a)| \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i - a| + \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}|a_i - a|$$

 $(a_n)_n$ ist als konvergente Folge beschränkt, etwa $|a_i| \leq M$ für alle i. Damit kann man $|b_n - a|$ abschätzen durch

$$|b_n - a| \le \frac{k(M + |a|)}{n} + \frac{\epsilon}{n}(n - k)$$

Für $n \geq k^2$ ist das $\leq \frac{M+|a|}{\sqrt{n}} + \epsilon < 2\epsilon$, also $< 2\epsilon$, falls zusätzlich $n > (\frac{M+|a|}{\epsilon})^2$.

Der Satz, aus dem nun alles weiter folgt, ist

Satz 30. (Fejer) Die Fourierreihe einer stetigen 2π -periodischen Funktion konvergiert im Sinne von Cesaro punktweise gegen f.

Beweis: Sei

$$s_n(x) = \sum_{|\nu| < n} c_{\nu} e^{i\nu x}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$t_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k(x)$$

Wir müssen zeigen, daß $\lim_{n\to\infty} t_n(x) = f(x)$. Dazu berechnen wir

$$t_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{|\nu| < k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f(t) dt \cdot e^{i\nu x}$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=-(k-1)}^{k-1} \int_{0}^{2\pi} f(t+x)e^{-i\nu t} dt$$

(weil f periodisch, braucht man die Grenzen des Integrals nicht zu verschieben)

$$=\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x+t) F_n(t) dt$$
 mit

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=-(k-1)}^{k-1} e^{i\nu t}$$

Durch zweimalige Anwendung der geometrischen Summenformel erhält man

$$F_n(t) = \frac{e^{it}}{n(e^{it} - 1)^2} \cdot (e^{int} - 2 + e^{-int})$$

was wegen $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$ dasselbe ist wie

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

Man nennt F_n den Fejer-Kern. Er hat die Eigenschaften

- 1. $F_n(x)$ ist stetig und 2π -periodisch und stets ≥ 0 .

2. $F_n(0) = n$ 3. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) dt = 1$ Aus diesen drei Eigenschaften folgt schnell der Beweis des Satzes: Zu zeigen ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) f(x+t) \, dt = f(x)$$

Da f stetig, gibt es zu jedem $\epsilon>0$ ein $\delta>0$ mit $|f(x+t)-f(x)|<\epsilon$ sobald $|t|<\delta$. Im Intervall $\delta \le t \le 2\pi - \delta$ ist stets $\sin \frac{t}{2} \ge \sin \frac{\delta}{2}$

also

$$0 \le F_n(t) \le \frac{1}{n \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Nun wird

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) f(x+t) dt - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(t) (f(x+t) - f(x)) dt \text{ nach (3)}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{2\pi - \delta} \right\} \text{ wegen der Periodizität}$$

Das erste Integral ist dem Betrage nach $\leq \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} F_n(t) dt \leq \epsilon \int_{0}^{2\pi} F_n(t) dt$ (weil $F_n \geq 0$), also $\leq \epsilon \cdot 2\pi$. Das zweite Integral ist, wenn M eine Schranke für die Funktion f ist, dem Betrage nach

$$\leq \frac{1}{n \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}} \cdot 2M \cdot 2\pi$$

also ebenfalls $\langle \epsilon \cdot 2\pi$, wenn n groß genug ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Zusatz: Da f auf dem kompakten Intervall sogar gleichmäßig stetig ist, kann man im Beweis δ und damit die Stelle n_0 , von der an $|t_n(x) - f(x)| < \epsilon$ ist, unabhängig von x wählen, d.h. die Folge der $t_n(x)$ konvergiert sogar gleichmäßig gegen f(x).

Die t_n sind zwar nicht die Abschnitte der Fourierreihe, aber immerhin "trigonometrische Polynome":

Definition: Ein Polynom in e^{ix} und e^{-ix} (das ist eine endliche (!) Linearkombination der $e_k = e^{ikx}$) heißt ein trigonometrisches Polynom.

Zum Beispiel ist

$$t_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{|\nu| < k} e^{i\nu x} = \sum_{|\nu| < n} \frac{n - |\nu|}{n} e^{i\nu x}$$

ein trigonometrisches Polynom vom Grad < n. Der Satz von Fejer mit seinem Zusatz hat unmittelbar die Folge

Satz 31. (Weierstraß-Approximation) Jede stetige 2π -periodische Funktion ist gleichmäßiger Limes von trigonometrischen Polynomen.

Daraus folgt

Satz 32. Für jede stetige 2π -periodische Funktion gilt die Parsevalsche Gleichung:

$$\sum_{n} |c_n|^2 = |f|_2^2$$

Beweis: Sei t(x) ein trigonometrisches Polynom, etwa vom Grad n, mit $|t(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle x. Dann ist

$$0 \le |f|_2^2 - \sum_{|k| \le n} |c_k|^2 = |f - \sum_{|k| \le n} c_k e_k|_2^2 \le |f - t|_2^2 \le 2\pi\epsilon^2$$

wobei die erste Ungleichung die Besselsche Ungleichung ist und die vorletzte aus der Minimaleigenschaft der Fourierkoeffizienten folgt.

Und jetzt kommt der wichtige

Satz 33. Ist f stetig differenzierbar und 2π - periodisch, so konvergiert die Fourierreihe von f absolut und gleichmäßig gegen f.

Beweis: Nach Voraussetzung ist f' stetig. Seinen b_n die Fourierkoeffizienten von f' und c_n die von f.

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \{ |_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} - \int_0^{2\pi} f(x) \cdot (-in)e^{-inx} dx \} = inc_n$$

Für alle N haben wir

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n| = |c_0| + \sum_{|n| \le N, n \ne 0} \left| \frac{1}{n} b_n \right| \le |c_0| + \sqrt{2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=-N}^{N} |b_n|^2} \quad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

Nun ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent, und nach der Besselschen Ungleichung ist $\sum |b_n|^2$ konvergent. Damit folgt die Konvergenz von $\sum |c_n|$, und das bedeutet die absolute Konvergenz der Fourierreihe $\sum c_n e^{inx}$. Nach Lemma 1 ist der Wert der Reihe derselbe wie der Cesaro-Grenzwert, und nach Satz 30 konvergiert die Reihe im Sinne von Cesaro gegen f(x), und die Konvergenz ist sogar gleichmäßig. qed

Zusatz: Die Rechnungen, die zur Besselschen Ungleichung geführt hatte, gelten für alle integrierbaren Funktionen f. Wir hatten zu Anfang nur deshalb den Vektorraum V aller stetigen, 2π -periodischen Funktionen genommen, um einen engeren Zusammenhang zu Kap 13 zu haben: nur für stetige Funktionen ist nämlich die hermitesche Form (...) postiv definit. Das Argument im Beweis von Satz 33 bleibt also zum Beispiel

richtig, wenn die Ableitung f' endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt. Die Voraussetzung von Satz 33 kann also so abgeschwächt werden:

f sei stetig und 2π -periodisch und stückweise stetig differenzierbar.

Aber man möchte natürlich gerne auch für Funktionen, die nicht den Voraussetzungen von Satz 33 oder seinem Zusatz genügen, Auskunft über die Konvergenz der Fourierreihe, zumal man die gegebene Funktion oft mit Gewalt periodisch machen muß, so daß sie mindestens an den Vielfachen von 2π Unstetigkeiten bekommt. Ein hervorragendes Mittel hierfür ist der

Satz 34. (Riemannscher Lokalisationssatz) Die Funktionen f und g seien 2π -periodisch und integrierbar, und es gebe ein offenes Intervall $I = (a - \delta, a + \delta)$ um die Stelle a, so daß

$$f(x) = g(x)$$
 für alle $x \in I$

Wenn die Fourierreihe von f an der Stelle a konvergiert zum Wert s, dann auch die von g, und zwar gegen denselben Wert s.

Beweis: Sei f - g = h und a_n, b_n, c_n die Fourierkoeffizienten von f, g, h resp. Dann ist $a_n - b_n = c_n$. Die Voraussetzung lautet

$$\sum_{n} a_n e^{ina} = s \quad \text{und} \quad h(x) = 0 \text{ für alle } x \in I$$

und zu zeigen ist

$$\sum_{n} c_n e^{ina} = 0$$

Wir setzen

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{h(x)}{e^{ix} - e^{ia}} & \text{wenn } x \neq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\phi(x)=0$ für $x\in I$ und 2π -periodisch und integrierbar über das Intervall $[0,2\pi]$. Nach der Besselschen Ungleichung gehen die Fourierkoeffizienten d_n von ϕ gegen 0 für $|n|\to\infty$. Nun ist

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{ix} - e^{ia})\phi(x)e^{-inx}dx = d_{n-1} - e^{ia}d_n$$

Daraus folgt

$$\sum_{|k| \le n} c_k e^{ika} = \sum_{|k| \le n} (d_{k-1} - e^{ia} d_k) e^{ika} = \sum_{k=-n}^n d_{k-1} e^{ika} - \sum_{k=-n}^n d_k e^{i(k+1)a} = d_{-n-1} e^{-ina} - d_n e^{i(n-1)a}$$

Wie bemerkt, geht dies gegen 0 für $|n| \to \infty$, womit Satz 34 bewiesen ist.

Anwendung: f sei stetig differenzierbar, aber vielleicht nicht 2π -periodisch. Dann ersetzen wir f durch eine stetig differenzierbare und periodische Funktion g, welche außer in kleinen Intervallen um die ganzzahligen Vielfachen von 2π mit f übereinstimmt.

Da nun g überall durch seine Fouriereihe dargestellt wird, gilt nach dem Lokalisationssatz dasselbe für f in einem Intervall $(\delta, 2\pi - \delta)$, und das kann man für jedes $\delta > 0$ bewerkstelligen.

1. Beispiel: $f(x) = \pi - x$. Die Fourierkoeffizienten c_n von f sind gegeben durch

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} (\pi - x)e^{-inx} dx = \begin{cases} \frac{2\pi}{in} & \text{wenn } n \neq 0\\ 0 & \text{wenn } n = 0 \end{cases}$$

Daher gilt (benutze $e^{inx} - e^{-inx} = 2i \sin x$)

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \text{ für } 0 < x < 2\pi$$

Offensichtlich gilt die Gleichung wirklich nicht an der Stelle x=0.

2. Beispiel: $f(x) = (\pi - x)^2$. Wegen $f(0) = f(2\pi)$ ist die periodische Fortsetzung dieser Funktion stetig. Deshalb benötigt man den Riemannschen Lokalisationssatz hier nicht.

Durch partielle Integration findet man

$$c_n = \begin{cases} \frac{2}{n^2} & \text{wenn } n \neq 0\\ \frac{\pi^2}{3} & \text{wenn } n = 0 \end{cases}$$

Es folgt

$$(\pi - x)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n^2},$$

durch Zusammenfassen von n und -n

$$(\pi - x)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

und nach den Zusatz zu Satz 33 gilt dies sogar für $0 \le x \le 2\pi$. Hieraus kann man zum Beispiel sehen (setze x=0), daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Beispiel: z sei eine feste komplexe Zahl, aber kein ganzzahliges Vielfaches von i. Es sei $f(z)=e^{zx}$. Hier wird wieder der Lokalisationssatz benötigt; denn die periodische Fortsetzung von f ist bei 0 nicht stetig. Die Fourierkoeffizienten von f wurden in den Übungen berechnet. Das Ergebnis ist

$$2\pi \frac{e^{z(x-\pi)}}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{z - in} \text{ für } 0 < x < 2\pi$$

Setzt man $x = \pi$ und faßt wieder n mit -n zusammen, so erhält man

$$\frac{2\pi}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 + n^2}$$

Benutzt man dies für iz statt z (dann natürlich mit der Voraussetzung $z \notin \mathbb{Z}$), so erhält man

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2} \text{ für } z \notin \mathbb{Z}$$

Partialbruchzerlegung des Sinus

15. Integral rechnung im \mathbb{R}^n

Ein Quader K im \mathbb{R}^n ist ein cartesisches Produkt von Intervallen $I_1, ..., I_n$:

$$K = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in I_i \text{ für } i = 1, ..., n\}$$

Die Intervalle sind gegeben durch ihre Enden $a_i < b_i$. Wir wollen im Folgenden stets abgeschlossenene Quader verwenden, also

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i \text{ für } i = 1, ..., n\}$$
 abgeschlossener Quader im \mathbb{R}^n

Eine Unterteilung T von K wird gegeben durch Zwischenpunkte in den Intervallen I_i :

$$x_{0j} = a_j < x_{1j} < \dots < x_{m_j j} = b_j$$

Die durch diese Teilpunkte entstehenden (auch stets abgeschlossenen) Quader Q haben höchstens Randpunkte gemeinsam, und ihre Vereinigung ist K.

Sei f eine reellwertige beschränkte Funktion auf K. Dann existiert auf jeder Teilmenge von K das Supremum der Funktionswerte f(x). Zu jeder Unterteilung T von K betrachten wir die Obersummen

$$O(T, f) := \sum_{Q \in T} \sup_{x \in Q} f(x) \cdot vol(Q)$$

wobei das Volumen vol(Q) nach Definition das Produkt der Kantenlängen von Q ist. Genauso betrachten wir die Untersummen

$$U(T,f) := \sum_{Q \in T} \inf_{x \in Q} f(x) \cdot vol(Q)$$

Behauptung: Jede Untersumme ist \leq jeder Obersumme.

Beweis: Zu je zwei Unterteilungen T_1 und T_2 gibt es eine gemeinsame Verfeinerung T, die dadurch entsteht, daß man alle Teilpunkte von T_1 und T_2 zusammen nimmt. Jeder Quader von T ist dann in einem Quader von T_1 enthalten, und

$$O(T_1, f) = \sum_{Q \in T_1} \sup_{Q} f \cdot vol(Q) = \sum_{Q \in T_1} \sup_{Q} f \cdot \sum_{Q' \in T, Q' \subset Q} vol(Q) \ge \sum_{Q' \in T} \sup_{Q'} f \cdot vol(Q') = O(T, f)$$

Völlig analog ist

$$U(T_2, f) \leq U(T, f)$$

Zusammen:

$$U(T_2, f) \le U(T, f) \le O(T, f) \le O(T_1, f)$$

Insbesondere ist die Menge der Untersummen nach oben und die Menge der Obersummen nach unten beschränkt.

Definition: Das Supremum aller Untersummen heißt das Unterintegral von f (über K) und das Infimum aller Obersummen heißt das Oberintegral:

$$\int_{*K} f(x) \, dx := \sup_{T} U(T, f)$$

$$\int_{K}^{*} f(x) dx := \inf_{T} O(T, f)$$

Üblich ist auch $d^n x$ oder $d\mu(x)$ oder $d(x_1,...,x_n)$ statt dx.

Definition: f heißt integrierbar (über den Quader K), wenn

$$\int_{*K} f(x) \, dx = \int_{K}^{*} f(x) \, dx$$

Dieser gemeinsame Wert heißt dann das Integral von f über K, bezeichnet $\int_K f(x) \, dx$. Manchmal werden wir sogar, wenn die Formel dadurch übersichtlicher wird, nur $\int_K f$ schreiben.

Das Supremum s einer beschränkten Menge reeller Zahlen ist nach Definition die kleinste obere Schranke. Das bedeutet: Alle Elemente der Menge sind $\leq s$, aber für jedes $\epsilon > 0$ ist $s - \epsilon$ keine obere Schranke mehr, das heißt es gibt ein Element der Menge, welches $> s - \epsilon$ ist. In der obigen Situation:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Teilung T so daß

$$\int_{*K} f - \epsilon < U(T, f) \le \int_{*K} f$$

Analog gibt es eine Unterteilung mit > für das Oberintegral, und für die gemeinsame Verfeinerung (wieder T genannt) gilt

$$\int_{*K} f - \epsilon < U(T, f) \le O(T, f) < \int_{K}^{*} f + \epsilon$$

Daraus lesen wir das Integrierbarkeitskriterium ab:

Die (stets als beschränkt vorausgesetzte) Funktion f ist genau dann über K integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Teilung T von K gibt, so daß

$$\sum_{Q \in T} \{\sup_{Q} f - \inf_{Q} f\} \operatorname{vol}(Q) < \epsilon$$

 $\begin{array}{ll} \textit{Definition:} & \sup_{x \in Q} f(x) - \inf_{x \in Q} f(x) =: \sigma(Q, f) \text{ heißt die Schwankung von } f \text{ auf } Q \text{. Sie ist kraft Definition stets } > 0 \,. \end{array}$

Wir haben also das

Schwankungskriterium: f ist genau dann über K integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon>0$ eine Teilung T von K gibt so daß die Schwankungssumme

$$\sum_{Q \in T} \sigma(f, Q) vol(Q) < \epsilon \text{ ist}$$

Jetzt kann man bequem die folgenden Behauptungen beweisen:

Beh 1. Jede stetige Funktion ist (über jeden Quader) integrierbar

Beweis: Eine stetige Funktion f auf K ist dort von selbst gleichmäßig stetig: Zu jedem $\epsilon>0$ gibt es $\delta>0$ mit

 $|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{vol(K)} \text{ für alle } x,y\in K \text{ mit } |x-y|<\delta$

Wählt man eine Unterteilung T, in der jeder Quader einen Durchmesser (=maximale Entfernung zweier Punkte) $<\delta$ hat, so wird offenbar die Schwankungssumme $\sum_{Q\in T}\sigma(Q,f)\,vol(Q)<\epsilon$.

Beh 2. Mit f und g ist auch $\alpha f + \beta g$ für jedes α, β integrierbar, und (in etwas verkürzter Schreibweise)

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

Beweis: In der folgenden Rechnung sollen α und β zunächst > 0 sein. Für jede Teilung T gilt

$$O(T, \alpha f + \beta g) = \sum_{Q \in T} \sup_{x \in Q} \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} \operatorname{vol}(Q)$$

$$\leq \sum_{Q \in T} \{\alpha \sup_{Q} f(x) + \beta \sup_{Q} g(x)\} \operatorname{vol}(Q) = \alpha O(T, f) + \beta O(T, g)$$

Analog ist

$$U(T, \alpha f + \beta g) \ge \alpha U(T, f) + \beta U(T, g)$$

Sind f und g integrierbar, so gibt es zu $\epsilon > 0$ eine Teilung T mit

$$O(T, f) \le U(T, f) + \epsilon$$
, analog für g

Es folgt

$$O(T, \alpha f + \beta g) \le \alpha O(T, f) + \beta O(T, g) \le \alpha U(T, f) + \beta U(T, g) + (\alpha + \beta)\epsilon \le U(T, \alpha f + \beta g) + (\alpha + \beta)\epsilon$$

Daraus folgt die Integrierbarkeit von $\alpha f + \beta g$ und die behauptete Formel. Um die Behauptung für beliebige α, β zu beweisen, muß man nur bemerken, daß die Obersummen von -f gerade die mit -1 multiplizierten Untersummen von f sind.

Beh 3. Mit f ist auch |f| integrierbar.

Beweis: Wegen der Dreiecksungleichung $||a|-|b|| \leq |a-b|$ ist die Schwankung von |f| höchstens so groß wie die von f.

Beh 4. Mit f ist f^2 integrierbar.

Beweis: Sei M eine Schranke für |f| auf K. Dann ist

$$\sigma(f^2, Q) = \sup_{x, y \in Q} |f^2(x) - f^2(y)| = \sup_{x, y \in Q} |f(x) + f(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \le 2M \cdot \sigma(f, Q)$$

Beh 5. Mit f und g ist fg integrierbar.

Beweis:

$$fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$$

Definition: Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt J-Nullmenge (J = Jordan), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele kompakte Quader $Q_1,, Q_k$ gibt, so daß

$$N \subset \bigcup_{i=1}^k Q_i \text{ und } \sum_{i=1}^k vol(Q_i) < \epsilon$$

Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt L-Nullmenge (L = Lebesgue), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ abzählbar viele kompakte Quader Q_1, Q_2, \dots gibt mit

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$
 und $\sum_{k=1}^{\infty} vol(Q_k) < \epsilon$

Zum Beispiel ist jede abzählbare Punktmenge (etwa $\mathbb Q$ in $\mathbb R$) eine L-Nullmenge. Aber $\mathbb Q$ ist keine J-Nullmenge in $\mathbb R$.

Beh 6. Jede kompakte L-Nullmenge ist eine J-Nullmenge: Ist $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, so blähe man jeden Q_k ein wenig auf, etwa um den Faktor $1+\epsilon$. Danach ist N sogar in der Vereinigung der offenen Quader enthalten. Da N kompakt, genügen von diesen endlich viele, und die Summe von deren Volumina ist $< (1+\epsilon)^n \cdot \epsilon < 2\epsilon$ für kleine ϵ .

Beh 7. Die Vereinigung von abzählbar vielen L-Nullmengen ist ebenfalls L-Nullmenge: Sind N_k L-Nullmengen, so hat man kompakte Quader Q_{kj} mit

$$N_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{kj} \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} vol(Q_{kj}) < \frac{\epsilon}{2^k}$$

Und dann ist

$$N := \bigcup_k N_k \subset \bigcup_{k,j=1}^{\infty} Q_{kj} \text{ mit } \sum_{k,j=1}^{\infty} vol(Q_{kj}) < \epsilon \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \epsilon$$

Beh 8. (Integrierbarkeitskriterium) f ist integrierbar über K genau dann, wenn die Menge B(f) der Unstetigkeitsstellen von f in K eine L-Nullmenge ist.

Beweis: " \Rightarrow ": Ist f unstetig bei $a \in K$, so gibt es $\epsilon > 0$ derart, daß in jeder Umgebung von a ein Punkt x existiert mit $|f(x) - f(a)| \ge \epsilon$: In jeder Umgebung von a ist die Schwankung von f mindestens ϵ . Umgekehrt: Ist letzteres der Fall, so ist f unstetig bei a. Setzt man also

$$B_{\delta} = \{ x \in K \mid \text{ für jedes offene } U \ni x \text{ ist } \sigma(f, U \cap K) \ge \delta \}$$

so ist

$$B(f) = \bigcup_{\delta > 0} B_{\delta} = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{\frac{1}{m}}$$

Nach Beh 7 genügt es zu zeigen, daß jedes B_{δ} eine L-Nullmenge ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es gibt eine Teilung T von K mit

(1)
$$\sum_{Q \in T} \sigma(f, Q) \operatorname{vol}(Q) < \epsilon \delta$$

Es ist

$$(2) B_{\delta} = \bigcup_{Q \in T} (B_{\delta} \cap Q) = \bigcup_{Q \in T} [(B_{\delta} \cap Q^{o}) \cup (B_{\delta} \cap \partial Q)] \subset \bigcup_{Q \in T} (B_{\delta} \cap Q^{o}) \cup \bigcup_{Q \in T} \partial Q$$

Nach (1) ist

$$\epsilon \delta > \sum_{Q \in T} \sigma(f,Q) vol(Q) \geq \sum_{Q \in T, B_{\delta} \cap Q^{o} \neq \emptyset} \sigma(f,Q) vol(Q) \geq \delta \sum_{Q \in T, B_{\delta} \cap Q^{o} \neq \emptyset} vol(Q)$$

also

(3)
$$\sum_{Q \in T, B_{\delta} \cap Q^{\circ} \neq \emptyset} vol(Q) < \epsilon$$

Die $\cup_{Q\in T}\partial Q$ ist eine Nullmenge. Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.

" \Leftarrow ": Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Ist B(f) eine L-Nullmenge, so erst recht B_{ϵ} . Aus der Definition von B_{ϵ} folgt unmittelbar, daß das Komplement von B_{ϵ} offen und damit B_{ϵ} eine abgeschlossene Teilmenge von K und

damit kompakt ist. Nach Beh 6 ist B_{ϵ} sogar eine J-Nullmenge. Es gibt endlich viele Quader, die zusammen B_{ϵ} überdecken, mit Volumensumme $< \epsilon$. Durch Aufblähen können wir wieder annehmen, daß

$$B_{\epsilon} \subset \bigcup_{i=1}^{m} Q_{i}^{o} \text{ und } \sum_{i=1}^{m} vol(Q_{i}) < \epsilon$$

Durch Verlängerung aller Wände von $Q_1,...,Q_m$ erhält man eine Teilung T von K:

Ist P ein abgeschlossener Quader von T, der in keinem Q_i enthalten ist, so ist $P \cap B_{\epsilon} = \emptyset$, und jeder Punkt $a \in P$ besitzt eine Umgebung, in der f um weniger als ϵ schwankt. Man kann P in Teilquader einteilen, auf deren jedem f um weniger als ϵ schwankt. Auf diese Weise erhält man eine Verfeinerung T^* von T. In T^* gibt es zwei Sorten von Quadern:

$$T_1 = \{ Q \in T^* \mid Q \subset Q_i \text{ für ein } i = 1,, m \}$$

$$T_2 = T^* \setminus T_1$$
, und $\sigma(f, Q) < \epsilon$ für alle $Q \in T_2$

Sei M eine Schranke für |f| auf K . Nun ist

$$\sum_{Q \in T^*} \sigma(f, Q) vol(Q) = \sum_{Q \in T_1} + \sum_{Q \in T_2} \leq 2M \sum_{i=1}^m vol(Q_i) + \epsilon \sum_{Q \in T_2} vol(Q) \leq \epsilon (2M + vol(K))$$

Damit erfüllt f das Schwankungskriterium, qed.

Integration über Teilmengen:

Ist A eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n , so heißt

$$1_A(x) := \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{wenn } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix} \right.$$

die Indikatorfunktion (oder charakteristische Funktion) von A

Definition: Eine beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt J-meßbar, wenn ihre Indikatorfunktion über einen (und damit jeden) kompakten Quader K, der A enthält, integrierbar ist. Das Integral $\int_K 1_A(x) \, dx$ (dessen Wert für alle $K \supset A$ derselbe ist) nennt man das Volumen von A.

Eine (mindestens auf A definierte) Funktion f heißt über A integrierbar, wenn $f \cdot \mathbf{1}_A$ über einen (und damit jeden) A enthaltenden kompakten Quader integrierbar ist. Das Integral von f über A ist nach Definition

$$\int_{A} f(x) dx := \int_{K} f(x) \mathbf{1}_{A}(x) dx$$

Die Unstetigkeitsstellen von $\mathbf{1}_A$ bilden gerade den Rand ∂A von A. Aus Beh 8 folgt

Beh 9. Eine beschränkte Menge A ist genau dann J-Meßbar, wenn ihr Rand eine L-Nullmenge ist. Da der Rand kompakt ist, ist er in diesem Falle sogar eine J-Nullmenge (Beh 6)

Aus Beh 5 folgt: Ist f über den Quader K integrierbar und A eine J-meßbare Teilmenge von K, so ist $f \cdot 1_A$ über K integrierbar, also f über K integrierbar.

Beh 10. Ist A J-meßbar und T eine lineare Transformation, so ist auch das Bild T(A) J-meßbar. Ist f integrierbar über A, so ist $f \circ T^{-1}$ integrierbar über T(A).

Beweis: Für eine lineare Transformation T gilt

$$T(\partial A) = \partial (T(A))$$

Für die Menge B der Unstetigkeitsstellen gilt

$$B((f \circ T^{-1}) \cdot 1_{T(A)}) \subset \partial(T(A)) \cup T(B(f \cdot 1_A))$$

Nach Beh 8 und 9 folgt die Beh 10 aus

(*) Ist N eine L-Nullmenge und T eine lineare Transformation, so ist T(N) eine L-Nullmenge

Beweis davon: Sei

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ mit } \sum_{i=1}^{\infty} vol(Q_i) < \epsilon$$

Nach Aufgabe 47 können wir annehmen, daß die Q_i Würfel sind. Ein Würfel mit Kantenlänge c ist enthalten in einer Kugel vom Radius $r=\frac{c}{2}\sqrt{n}$. Nach Satz 19, Kap 9, ist das Bild dieser Kugel enthalten in einer Kugel vom Radius $||T||\cdot r$ und diese wiederum in einem Würfel mit Kantenlänge $2||T||r=||T||c\sqrt{n}$. Also ist

$$T(N) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i' \text{ mit } \sum_{i=1}^{\infty} vol(Q_i') \leq (||T||\sqrt{n})^n \sum_{i=1}^{\infty} vol(Q_i) < const \cdot \epsilon$$

Das beweist (*) und damit Beh 10.

Beh 11. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ fest und $f_a(x) := f(x+a)$. Dann gilt

$$\int_{*K} f(x) dx = \int_{*(K-a)} f_a(x) dx$$

Dasselbe gilt für das Oberintegral und damit, falls f integrierbar ist, für das Integral.

Beweis: Sei T eine Teilung von K und $T^a = \{Q - a \mid Q \in T\}$. Das ist eine Teilung von K - a. Für die Untersummen jeder beschränkten Funktion f gilt

$$U(T,f) = \sum_{Q \in T} \inf_{x \in Q} f(x)vol(Q) = \sum_{Q \in T} \inf_{x \in Q} f_a(x-a)vol(Q) = \sum_{Q \in T} \inf_{y \in Q-a} f_a(y)vol(Q-a)$$

$$= \sum_{P \in T^a} \inf_{y \in P} f_a(y) vol(P) \le \int_{*K-a} f_a(x) dx$$

Da dies für jede Untersumme U(T, f) gilt, gilt es auch für deren Supremum, das ist das Unterintegral von f:

$$\int_{*K} f(x) \, dx \le \int_{*(K-a)} f_a(x) \, dx$$

Indem man die Rollen von f und f_a vertauscht, folgt = . Der Beweis für die Obersummen geht analog. Ist f integrierbar, so folgt es für das Integral, qed.

In Analysis I wird die Substitutionsformel

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x) \, dx = \lambda \int_{a}^{b} f(\lambda x) \, dx$$

bewiesen. Dort ist das Integral mit einem Durchlaufungssinn versehen: Wenn $\lambda < 0$ (und a < b), so wird auf der linken Seite der Integrationsweg von rechts nach links durchlaufen. Das in diesem Kap definierte Integral jedoch multiplizierte (in den Unter- bzw. Obersummen) die Funktionswerte mit dem Volumen der Quader, ohne Rücksicht auf eine Orientierung von letzteren. Statt \int_a^b ist jetzt \int_I gemeint, und vol(I) ist die Länge des Intervalls I, und das ist der Absolutbetrag der Differenz der Endpunkte. Für das in diesem Kap definierte Integral gilt also im Falle n=1

Beh 12.
$$\int_{\lambda I} f(x) dx = |\lambda| \int_{I} f(\lambda x) dx$$

Nächstes Ziel ist der Satz von Fubini. Aus schreibtechnischen Gründen formulieren und beweisen wir ihn für n=2, aber es ist klar, wie man ihn für eine Zerlegung $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{n-p}$ entsprechend beweist. K sei das Rechteck $a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d$, und f eine über K integrierbare Funktion. Zu $\epsilon>0$ gibt es eine Teilung T mit

$$\int_{K} f - \epsilon \leq \sum_{Q \in T} \inf_{Q} f \ vol(Q) \leq \sum_{Q \in T} \sup_{Q} f \ vol(Q) \leq \int_{K} f + \epsilon$$

T wird verursacht durch Teilpunkte x_i, y_i :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, \ c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

Man wählt beliebige Zwischenstellen $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ und rechnet:

$$\int_{K} f - \epsilon \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_{i}, y_{j-1} \leq y \leq y_{j}} f(x, y)(x_{i} - x_{i-1})(y_{j} - y_{j-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_{i}} f(x, \eta_{j})(x_{i} - x_{i-1})(y_{j} - y_{j-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \{ \int_{*a}^{b} f(x, \eta_{j}) dx \} (y_{j} - y_{j-1})$$

Weil diese Ungleichung für alle $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ gilt, gilt sie auch noch für das Infimum über alle y aus diesem Intervall:

$$\int_{K} f - \epsilon \le \sum_{j=1}^{n} \{ \inf_{y_{j-1} \le y \le y_{j}} \int_{*a}^{b} f(x, y) \, dx \} \, (y_{j} - y_{j-1})$$

Das innere Integral über x ist eine Funktion von y, und die Summe $\sum_{j=1}^n$ ist eine Untersumme zum Integral dieser Funktion über das Intervall [c,d]. Da alle Untersummen \leq dem Unterintegral sind, ist das Erhaltene $\leq \int_{*c}^d (\int_{*a}^b f(x,y) \, dx) \, dy$. Wir haben also

$$\int_{K} f - \epsilon \le \int_{*c}^{d} \left(\int_{*a}^{b} f(x, y) \, dx \right) \, dy$$

Für das Oberintegral haben wir eine analoge Ungleichung, aber natürlich mit \geq statt \leq . Da das Unterintegral immer \leq dem Oberintegral ist, haben wir in leicht verständlicher Abkürzung

$$\int_{K} -\epsilon \le \int_{*c}^{d} \int_{*a}^{b} \le \begin{cases} \int_{*c}^{d} \int_{a}^{*b} \\ \int_{c}^{*d} \int_{*a}^{b} \end{cases} \le \int_{c}^{*d} \int_{a}^{*b} \le \int_{K} +\epsilon$$

Daraus ist abzulesen

Satz 36. (Fubini) Wenn f über das Rechteck K integrierbar ist, dann gilt

- 1. $F_*(y) := \int_{*a}^b f(x,y) dx$ ist über [c,d] integrierbar 2. $F^*(y) := \int_a^{*b} f(x,y) dx$ ist über [c,d] integrierbar

$$\int_{C}^{d} F_{*}(y) \, dy = \int_{K} f(x, y) \, d(x, y) \, = \int_{C}^{d} F^{*}(y) \, dy$$

Bemerkung: Leider kann man aus der Integrierbarkeit von f über das Rechteck nicht schließen, daß die Funktionen $\phi_y(x) := f(x,y)$ integrierbar sind. Umgekehrt folgt aus der Existenz des iterierten Integrals $\int_a^b \int_c^d$ nicht die Existenz des Integrals über K. (Beispiele in den Übungen)

Aus dem Satz von Fubini und den oben bewiesenen Beh 10,11,12 folgern wir

Satz 37. (Integraltransformationsformel für lineare Transformationen) Sei B J-meßbar, f integrierbar über B und T eine lineare Transformation. Dann ist $A := T^{-1}(B)$ J-meßbar und $f \circ T$ integrierbar über A und

$$\int_{B} f(x) dx = |\det T| \int_{A} f(Tx) dx$$

Beweis: Zur Erleichterung der Schreibarbeit sei wieder n=2. Sei zunächst $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda y \\ y \end{pmatrix}$. Nach Beh 10 ist, $f \circ T$ integrierbar über A. Sei $B=[a,b] \times [a,b]$. Beh 10 ist, $f \circ T$ integrierbar über A. Sei $B=[a,b] \times [a,b]$. Beh 10 ist $f \circ T$ integrierbar über A. Sei $R = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck, welches A und B enthält. Nach Fubini und nach Beh 11 ist

$$\int_A (f \circ T)(x,y) \ d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{*a}^b (f \circ T) \cdot \mathbf{1}_A(x,y) \ dx \right) \ dy =$$

$$\int_c^d \left(\int_{*a}^b f(x+\lambda y,y) \cdot \mathbf{1}_B(x+\lambda y,y) \ dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_{*a}^b f(x,y) \mathbf{1}_B(x,y) \ dx \right) dy = \int_B f(x,y) \ d(x,y) dx$$

Da det A=1, stimmt der Satz für Matrizen $A=1+\lambda e_{ik}$. Nach Fubini und Regel 13 stimmt er auch für Diagonalmatrizen. Nach Kapitel 2 kann man jede invertierbare Matrix A durch elementare Zeilenumformungen auf Diagonalgestalt bringen. Eine elementare Zeilenumformung bedeutet dasselbe wir eine Multiplikation von links mit einer Matrix $1 + \lambda e_{ij}$:

$$(1 + \lambda e_{ij})A = A + \lambda e_{ij} \sum_{r,s} a_{rs} e_{rs} = A + \lambda \sum_{s} a_{js} e_{is}$$

und das letzte ist die Matrix, die aus A entsteht, wenn man zur i-ten Zeile das λ -fache der j-ten addiert. (Deshalb nennt man die Matrizen $1 + \lambda e_{ij}$ mit $i \neq j$ auch elementare Matrizen).

Zu jeder Matrix A gibt es also elementare Matrizen $E_1, ..., E_k$ und eine Diagonalmatrix D, so daß $E_1...E_k A = D$ oder $A = E_k^{-1}...E_1^{-1}D$ ist. Durch mehrfache Anwendung von Fubini und Regel 11 und 12 folgt die Behauptung.

Der wichtigste Satz dieses Kapitels (neben Fubini) ist die Integraltransformationsformel. Sie lautet

Satz 38. U und V seien offene, beschränkte und J-meßbare Mengen im \mathbb{R}^n und ϕ ein Diffeomorphismus von U auf V. Die stetige Funktion $|\det D\phi(x)|$ sei auf U beschränkt. (Das erreicht man am einfachsten, indem man annimmt, daß ϕ auf einer den Abschluß von U enthaltenden offenen Menge stetig differenzierbar sei). Die Funktion f sei integrierbar über V. Dann ist $f \circ \phi$ integrierbar über U, und

$$\int_{V} f(y) \, dy = \int_{U} f(\phi x) |\det D\phi(x)| \, dx$$

Wir beweisen den Satz zuerst für den Spezialfall, daß f stetig sei und = 0 außerhalb eines passenden ganz in V enthaltenen Kompaktums und erklären später (A1 bis A3), wie man den allgemeinen Fall auf diesen zurückführt.

Wir verwenden

Definition: Die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte, an denen die Funktion f nicht 0 ist, heißt der Träger von f:

 $Tr(f) = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$

Der Träger ist nach Definition stets abgeschlossen. "Kompakter Träger" bedeutet, daß er zusätzlich beschränkt ist.

Der folgende Beweis stammt aus dem Skript der Analysisvorlesung von R. Weissauer:

Beweis von Satz 38 für stetige Funktionen f mit kompaktem Träger $\subset V$: Nach Definition von "J-meßbar" und Behauptung 5 existieren beide Integrale.

1. Es genügt, statt der Gleichung \leq zu beweisen; denn wenn für alle U, V, ϕ, f , welche den Bedingungen genügen, die linke Seite \leq der rechten ist, dann wenden wir die Ungleichung an auf V statt U und U statt V und die stetige Funktion $g(x) := f(\phi(x))|\det D\phi(x)|$ mit kompaktem Träger auf U:

$$\int_{U} g(x) \, dx \le \int_{V} g(\phi^{-1}(y)) |\det D\phi^{-1}(y)| \, dy$$

$$= \int_{V} f(y) |\det D\phi(\phi^{-1}y)| \cdot |\det D\phi^{-1}(y)| \ dy$$

Nach der Kettenregel (und dem Determinantenmultplikationssatz) steht rechts das $\int_V f(y) \, dy$, und das ist gerade die umgekehrte Ungleichung.

2. Wir nehmen an, die linke Seite sei nicht \leq der rechten, sondern um einen gewissen Betrag κ größer:

(1)
$$\int_{V} f(y) dy \ge \kappa + \int_{U} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| dx , \kappa > 0$$

Sei Q ein Quader im \mathbb{R}^n , welcher U enthält. Wir halbieren Q (in jeder Richtung) und erhalten 2^n Teilquader Q_i , und

$$\int_{U} = \sum_{i=1}^{2^{n}} \int_{U \cap Q_{i}} \text{ und } \int_{V} = \sum_{i=1}^{2^{n}} \int_{\phi(U \cap Q_{i})}$$

(Aus A1 wird hervorgehen, daß auch auf der rechten Seite die Teilintegrale existieren). Aus (1) folgt, daß für mindestens einen der Teilquader, etwa Q_1 , gelten muß

$$\int_{\phi(U\cap Q_1)} f(y) \, dy \ge \frac{\kappa}{2^n} + \int_{U\cap Q_1} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| \, dx$$

 Q_1 halbieren wir wieder und erhalten einen Quader Q_2 mit

$$\int_{\phi(U \cap Q_2)} \ge \frac{\kappa}{2^n \cdot 2^n} + \int_{U \cap Q_2}$$

usw. Wir erhalten eine Folge von Quadern

$$Q_0 = Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

mit

$$vol(Q_k) = 2^{-nk} vol(Q)$$
 und

$$(2) \qquad \frac{1}{vol(Q_m)} \int_{\phi(U \cap Q_m)} f(y) \, dy \ge \frac{\kappa}{vol(Q)} + \frac{1}{vol(Q_m)} \int_{U \cap Q_m} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| \, dx$$

Da Q kompakt, gibt es (genau) einen Punkt $x_0 \in \cap_{m=1}^{\infty} Q_m$. Wäre $x_0 \notin Tr(f \circ \phi) = \phi^{-1}Tr(f)$, so gäbe es, da dieser kompakt und daher sein Komplement offen ist, einen Index m mit $Q_m \cap Tr(f \circ \phi) = \emptyset$, erst recht $(U \cap Q_m) \cap Tr(f \circ \phi) = \emptyset$. Dann wären in (2) beide Integrale = 0, das ist aber unmöglich. Also ist $x_0 \in Tr(f \circ \phi) = \phi^{-1}Tr(f) \subset \phi^{-1}V = U$. Da U offen ist, sind von einer Stelle m_0 an alle $Q_m \subset U$, und (2) wird zu

(3)
$$\frac{1}{vol(Q_m)} \int_{\phi(Q_m)} f(y) \, dy \ge \frac{\kappa}{vol(Q)} + \frac{1}{vol(Q_m)} \int_{Q_m} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| \, dx$$

Da wir den Satz für lineare Abbildungen bereits bewiesen haben und da er, falls für zwei Abbildungen ϕ und ψ richtig, auch für $\phi \circ \psi$ richtig ist (Kettenregel), ist der Satz für ϕ bewiesen, wenn wir ihn für $D\phi(x_0)^{-1} \circ \phi$ bewiesen haben, und für diese zusammengesetzte Abbildung ist die Jacobimatrix an der Stelle x_0 die Einheitsmatrix. Kurz: wir dürfen annehmen, daß $D\phi(x_0) = 1$.

3. Jetzt bilden wir auf beiden Seiten von (3) den Limes für $m \to \infty$. Da $f \circ \phi$ sowie det $D\phi$ stetig sind und $D\phi(x_0) = 1$, erhalten wir auf der rechten Seite

$$\frac{\kappa}{vol(Q)} + f(y_0) \text{ mit } y_0 := \phi(x_0)$$

Für die linke Seite betrachten wir das Verhältnis der Volumina $\frac{vol(\phi(Q_m))}{vol(Q_m)}$: Nach Definition der Differenzierbarkeit im Punkte x_0 und wegen $D\phi(x_0) = \mathbf{1}$ ist

(4)
$$\phi(x) = \phi(x_0) + x - x_0 + |x - x_0| \psi(x) \text{ mit } \psi(x) \to 0 \text{ für } x \to x_0$$

Das bedeutet: Zu $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, daß für alle Komponenten ψ_i von ψ gilt

$$-\epsilon < \psi_i(x) < \epsilon \text{ für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \delta,$$

insbesondere für $x \in Q_m$, falls m groß genug. Sei d der Durchmesser (maximale Entfernung zweier Punkte = Länge der Diagonalen) von Q_m . Für $x \in Q_m$ (m >> 0) gilt für alle Komponenten

$$x_i - d\epsilon < x_i - |x - x_0|\epsilon < x_i + |x - x_0|\psi_i(x) < x_i + |x - x_0|\epsilon < x_i + d\epsilon$$

Das zeigt, daß die sämtlichen $x + |x - x_0| \psi(x)$ für $x \in Q_m$ enthalten sind in einem Quader \tilde{Q} , dessen i-te Kante um $2\epsilon d$ länger ist als die von Q_m , dessen Volumen also (wenn c_i die i-te Kante von Q ist)

$$\prod_{i=1}^{n} (c_i + 2\epsilon d) = \prod_{i=1}^{n} \{c_i (1 + \frac{2d}{c_i} \epsilon)\} \le \prod_{i=1}^{n} \{c_i (1 + \frac{2d}{c} \epsilon)\}$$

ist, woc die kleinste der Kantenlängen von Q_m ist. Das Verhältnis Durchmesser zu kürzester Kante ist bei allen Q_m dasselbe, denn sie gehen ja durch Halbierung aller Kanten auseinander hervor. Also ist das Volumen des etwas größeren Quaders

$$vol(\tilde{Q}) \le (1 + const \cdot \epsilon)^n vol(Q_m)$$

Nun zeigt (4), daß $\phi(Q_m)$ in dem um $\phi(x_0) - x_0$ verschobenen Quader \tilde{Q} liegt, also ist

$$vol(\phi(Q_m)) \leq (1 + const \cdot \epsilon)^n \cdot vol(Q_m)$$
 für $m >> 0$

Nun folgt für $m \to \infty$

$$(1 + const \cdot \epsilon)^n f(y_0) \ge \frac{\kappa}{vol(Q)} + f(y_0)$$

Da ϵ beliebig > 0 war, ist dies ein Widerspruch.

Nun die versprochenen Anmerkungen zum allgemeinen Fall:

A1. $f \circ \phi$ ist integrierbar über U: Zu zeigen ist: Die Menge $B((f \circ \phi) \cdot 1_U)$ der Unstetigkeitsstellen von $((f \circ \phi) \cdot 1_U)$ ist eine L-Nullmenge. Es gilt

$$B((f \circ \phi) \cdot 1_U) \subset [U \cap B(f \circ \phi)] \cup B(1_U)$$
$$= [U \cap \phi^{-1}B(f)] \cup \partial U = \phi^{-1}(V \cap B(f)) \cup \partial U$$

Da U J-meßbar, ist ∂U L-Nullmenge. Da f über V integrierbar, ist $V \cap B(f)$ L-Nullmenge. A1 folgt also aus

Beh 13. Ist V offen und $N \subset V$ eine L-Nullmenge und ψ stetig differenzierbar auf V, so ist $\psi(N)$ eine L-Nullmenge.

Beweis: (vgl. Aufgabe 54): V ist Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Quadern. Nach Beh 7 genügt es zu zeigen: Für jeden kompakten Quader Q ist $\phi(N \cap Q)$ eine L-Nullmenge. Auf dem kompakten Quader $Q \subset V$ nimmt die stetige Funktion $||D\phi(x)||$ ihr Maximum M_Q an. Nach Satz 19, Kap 9 ist

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le M_Q |x - y|$$
 für alle $x, y \in Q$

Jetzt geht der Beweis von Beh 13 zuende wie der von Beh 10.

Wir haben eingesehen: Wenn die linke Seite in der Transformationsformel existiert, dann auch die rechte.

A2. Ein Approximationssatz. Dazu eine kleine Vorbereitung:

Sei A eine abgeschlossene Teilmenge im \mathbb{R}^n . Nach Aufgabe 50 ist

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} |a - x| = \min_{a \in A} |a - x|$$

eine stetige Funktion auf \mathbb{R}^n , und

$$d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$$

Sind A und B abgeschlossen und disjunkt, so ist $d_A(x) + d_B(x)$ stets > 0, und

$$\frac{d_B(x)}{d_A(x) + d_B(x)} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in B \\ 1 & \text{für } x \in A \\ > 0 \text{ und } < 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei f integrierbar über den Quader K und zunächst ≥ 0 . Zu $\epsilon > 0$ gibt es eine Teilung T von K mit

$$\int_{K} f(x) dx - \epsilon \le U(T, f) \le \int_{K} f(x) dx$$

Für jeden Quader Q sei Q_{ϵ} der um den Faktor $1 - \epsilon$ in allen Richtungen geschrumpfte konzentrische Quader:

Für jedes $Q \in T$ sei

$$A_Q = \cup_{Q' \in T, Q' \neq Q} Q'$$

 Q_{ϵ} und A_Q sind abgeschlossene disjunkte Mengen. Man bildet

$$\psi_Q(x) = \frac{d_{A_Q}}{d_{A_Q} + d_{Q_\epsilon}}$$

Die Funktionen ψ_Q sind stetig, haben Werte zwischen 0 und 1, und erfüllen

$$\psi_Q(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in Q_{\epsilon} \\ 0 & \text{wenn } x \in K, \ x \notin Q^o \end{cases}$$

Man setzt

$$g(x) = \sum_{Q \in T} \psi_Q(x) \cdot \inf_{x \in Q} f(x)$$

a) g(x) ist stetig, $0 \le g(x) \le f(x)$ für alle $x \in K$, und $g(x) = \inf_{x \in Q} f(x)$ für $x \in Q_{\epsilon}$

b)

$$\int_K g(x) dx = \sum_{Q \in T} \int_Q \psi_Q(x) \inf_{x \in Q} f(x) dx \ge \sum_{Q \in T} \int_{Q_{\epsilon}} \inf_Q f(x) dx = \sum_Q \inf_Q f(x) \operatorname{vol}(Q_{\epsilon}) = (1 - \epsilon)^n U(T, f)$$

Daher ist

$$0 \le \int_K (f(x) - g(x)) \, dx \le U(T, f) + \epsilon - (1 - \epsilon)^n U(T, f) \le \epsilon + (1 - (1 - \epsilon)^n) \int_K f(x) \, dx \le const \cdot \epsilon + (1 - \epsilon)^n U(T, f) \le \epsilon + (1 - \epsilon)^n U(T$$

Ergebnis: Zu jeder über den Quader K integrierbaren Funktion $f \geq 0$ und $\epsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion g mit

$$0 \le g \le f \text{ und } \int_K (f(x) - g(x)) \, dx < \epsilon$$

Verbesserung: Wir erinnern an die Definition des Trägers auf Seite 80.

Sei U offen und beschränkt und J-meßbar. Wir wollen jetzt die über U integrierbaren Funktionen sogar approximieren durch stetige Funktionen, deren Träger in U enthalten ist. Da U J-meßbar ist, gibt es zu $\epsilon > 0$ eine endliche Vereinigung von kompakten Quadern $Q_i \subset U$ mit

(1)
$$0 \le \int_U dx - \sum_{i=1}^m vol(Q_i) < \epsilon$$

Sei $C = \bigcup_{i=1}^m Q_i$. Das Komplement U' von U und C sind abgeschlossen und disjunkt. Also gibt es eine stetige Funktion h_1

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in C \\ 0 & \text{wenn } x \notin U \\ 0 < h_1(x) < 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei

$$D = \{x \mid h_1(x) \le \frac{1}{2}\}\$$

D ist abgeschlossen, und $D \cap C = \emptyset$. Jetzt wählt man eine stetige Funktion h mit

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in C \\ 0 & \text{wenn } x \in D \\ 0 < h(x) < 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin D \Leftrightarrow h_1(x) > \frac{1}{2}$$

Der Träger von h ist also die abgeschlossene Menge aller x mit $h_1(x) \ge \frac{1}{2}$ und damit enthalten in U. Es gilt

$$\mathbf{1}_U \ge h \cdot \mathbf{1}_U = h \ge \mathbf{1}_C$$

und damit

(2)
$$0 \le \int_{U} dx - \int_{U} h(x) dx \le \int_{U} dx - \int_{C} dx < \epsilon$$

nach (1).

Ist jetzt $f \ge 0$ integrierbar über U, so bedeutet das ja, daß $f \cdot \mathbf{1}_U$ über einen U enthaltenden Quader K integrierbar ist. Dann wählt man zunächst eine stetige Funktion g auf K mit $0 \le g \le f \cdot \mathbf{1}_U$ und

(3)
$$\int_{K} (f \cdot \mathbf{1}_{U}(x) - g(x)) \, dx < \epsilon$$

Wegen $0 \le g \le f \cdot \mathbf{1}_U$ ist g(x) = 0 außerhalb U, und aus (3) folgt

$$\int_{U} (f(x) - g(x)) \, dx < \epsilon$$

und hieraus und aus (2) folgt

$$0 \le \int_{U} (f(x) - g(x)h(x)) dx = \int_{U} (f(x) - g(x)) dx + \int_{U} (g(x) - g(x)h(x)) dx < \epsilon + \epsilon \cdot \sup g \le \epsilon \cdot (1 + \sup f)$$

und gh ist eine stetige Funktion, deren Träger kompakt und in U enthalten ist.

Für jede offene Menge U bezeichnet man mit $C_c^0(U)$ den Vektorraum aller stetigen Funktionen, deren Träger kompakt und ganz in U enthalten ist, und mit $C_c^k(U)$ (bzw. C_c^∞) den Unterraum aller derer, die sogar k-mal stetig (bzw. unendlich oft) differenzierbar sind.

Ist U offen und beschränkt und J-meßbar, so bezeichnen wir mit $R_1(U)$ den Vektorraum aller über U integrierbaren Funktionen. Die 1-Norm auf U ist nach Definition

$$|f|_{1,U} := \int_{U} |f(x)| \, dx$$

Unser Ergebnis können wir also auch so formulieren:

Satz 39a. Ist f integrierbar über U und ≥ 0 , so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c^0(U)$ mit

$$0 \le g \le f$$
 und $|f - g|_{1,U} < \epsilon$

Jede Funktion f ist Differenz von 2 Funktionen ≥ 0 (nämlich $f = \frac{1}{2}(|f| + f) - \frac{1}{2}(|f| - f)$). Also hat man

Satz 39. $C_c^0(U)$ ist dicht in $R_1(U)$ bezüglich der 1-Norm.

(Dabei heißt eine Teilmenge A dicht in einem metrischen Raum X, wenn es in jeder Umgebung eines jeden Punktes von X einen Punkt von A gibt (zum Beispiel \mathbb{Q} in \mathbb{R} .))

A3. In der zu beweisenden Formel

(1)
$$\int_{V} f(y) dy = \int_{U} f(\phi(x)) |\det D\phi(x)| dx$$

approximieren wir $f \in R_1(V)$ durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger und nehmen zuerst wieder $f \geq 0$: Nach A2 gibt es $f_n \in C_c^0(V)$ mit

$$0 \le f_n \le f$$
 und $\int_V (f - f_n) \, dy \le \frac{1}{n}$

Da wir wissen, daß $f \circ \phi$ über U integrierbar ist, könen wir dasselbe auf der rechten Seite machen: Es gibt $g_n \in C_c^0(U)$ mit

$$0 \le g_n \le f \circ \phi$$
 und $\int_U (f \circ \phi - g_n) \, dx \le \frac{1}{n}$

Dann sind die $g_n \circ \phi^{-1} \in C^0_c(V)$ und $\leq f$, und ebenso

$$h_n := \max (f_n, g_n \circ \phi^{-1}) \in C_c^0(V)$$
 und $\leq f$

und man hat

(1)
$$\int_{V} (f - h_n) dy \le \int_{V} (f - f_n) dy \le \frac{1}{n}$$

(2)
$$\int_{U} (f \circ \phi - h_n \circ \phi) \, dx \le \int_{U} (f \circ \phi - g_n) \, dx \le \frac{1}{n}$$

Nach dem bewiesenen Teil des Satzes ist

(3)
$$\int_{V} h_n(y) dy = \int_{U} (h_n \circ \phi)(x) |\det D\phi(x)| dx$$

für alle n. Aus (1),(2) und (3) folgt

$$\begin{split} |\int_{V}f(y)\,dy - \int_{U}(f\circ\phi)(x)|\det D\phi(x)|\,dx| \leq \\ |\int_{V}(f-h_{n})\,dy| + |\int_{V}(h_{n}\,dy - \int_{U}(h_{n}\circ\phi)|\det D\phi|\,dx| + |\int_{U}(h_{n}\circ\phi - f\circ\phi)|\det D\phi|\,dx| \leq \\ \frac{1}{n} + 0 + \frac{1}{n}\cdot \sup_{x\in U}|\det D\phi(x)| \quad \text{für alle } n \end{split}$$

Das beweist die Transformationsformel für alle $f \ge 0$, und da mit zwei Funktionen auch deren Differenz die Gleichung erfüllt, ist damit der Satz 38 bewiesen.

Faltung:

f und g seien integrierbare Funktionen auf \mathbb{R}^n mit kompaktem Träger. Unter $\int f(x) dx$ bzw. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ versteht man das über irgendeinen kompakten Quader erstreckte Integral von f, welcher den Träger von f enthält. Der Wert des Integrals ist natürlich unabhängig davon, welchen Quader $\supset Tr(f)$ man nimmt. Sei

 $y \in \mathbb{R}^n$ fest. Mit g(x) ist auch die Funktion $x \mapsto g(y-x)$ integrierbar, und es existiert das $\int f(x)g(y-x)\,dx$. Es ist eine Funktion von y. Diese heißt die Faltung von f und g:

$$(f * g)(y) := \int f(x)g(y - x) dx$$

Beispiel:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(f * g)(y) = \int_{-1 < x < 1, -1 < y - x < 1} dx = \begin{cases} 2 - y & \text{wenn } 0 \le y \le 2\\ y + 2 & \text{wenn } -2 \le y \le 0\\ 0 & \text{wenn } |y| \ge 2 \end{cases}$$

Beobachtung: f * f ist stetig!

Der Träger von f * g ist wieder kompakt; genauer:

$$(f*g)(y) \neq 0 \Rightarrow \text{ es gibt } x \text{ so daß } x \in Tr(f) \text{ und } y - x \in Tr(g) \Rightarrow y \in Tr(f) + Tr(g)$$

also folgt

Beh 14.:
$$Tr(f*g) \subset Tr(f) + Tr(g)$$

und Tr(f) + Tr(g) ist eine kompakte Menge. Sind f und g über \mathbb{R}^n integrierbar, so ist die Funktion $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ über \mathbb{R}^{2n} integrierbar (das Schwankungskriterium ist offensichtlich erfüllt). Durch lineare Transformation geht daraus die Funktion

$$F(x,y) := f(x)q(y-x)$$

hervor, diese ist also auch über \mathbb{R}^{2n} integrierbar. Nach Fubini folgt

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)g(y-x) \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x) \, dx) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y) \, dy$$

Genauso ist aber auch

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} F(x,y) d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y-x) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy$$

Es folgt

$$\int (f * g)(y) \, dy = \int f(x) \, dx \cdot \int g(y) \, dy$$

Wendet man das auf |f| und |g| an, so folgt we gen $\int |\cdot| \geq |\int \cdot|$

$$|f * g|_1 = \int |f * g|(y) \, dy \le \int (|f| * |g|)(y) \, dy = |f|_1 \cdot |g|_1$$

Lemma 1. Sei f integrierbar und g stetig differenzierbar im \mathbb{R}^n , beide mit kompaktem Träger. Dann ist f * g stetig differenzierbar, und für die partiellen Ableitungen gilt

$$\partial_i(f * g) = f * \partial_i g$$

Beweis: Sei t reell und $y \in \mathbb{R}^n$ fest und $0 < |t| \le 1$. Wir betrachten

$$I := \frac{(f * g)(y + te_i) - (f * g)(y)}{t} - (f * \partial_i g)(y) =$$

$$\int f(x) \left[\frac{g(y-x+te_i) - g(y-x)}{t} - \partial_i g(y-x) \right] dx = \int f(x) \left[\partial_i g(y-x+\tau e_i) - \partial_i g(y-x) \right] dx$$

Dabei ist τ eine Stelle zwischen 0 und t, die aber natürlich von x abhängt, (y ist fest). Die Menge

$$C := Tr(g) + \overline{K_1(0)}$$

ist kompakt. Wenn die eckige Klammer unter dem Integral nicht 0 ist, dann ist wenigstens einer der beiden Summanden darin nicht 0, und in beiden Fällen muß sowohl y-x als auch $y-x+\tau e_i$ in C liegen. Nach Voraussetzung ist $\partial_i g$ stetig, auf C also gleichmäßig stetig. Zu $\epsilon>0$ gibt es $\delta>0$ so daß

$$|\partial_i g(z) - \partial_i g(w)| < \epsilon$$
 für alle $z, w \in C$ mit $|z - w| < \delta$

Da $|\tau| < |t| (\leq 1)$, folgt

$$|I| \le \int |f(x)| \cdot \epsilon \, dx = \epsilon |f|_1$$

wenn $|t| < \delta$. Das beweist die behauptete Formel, und da die $\partial_i g$ und damit auch die $f * \partial_i g$ stetig sind, das Lemma.

Folgerung: Ist $f \in R_1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Dies gilt sinngemäß auch für $k = \infty$.

Konstruktion einer unendlich oft differenzierbaren "Approximation der Eins":

Auf der reellen Achse nimmt man die Funktion

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{wenn } -1 < t < 1\\ 0 & \text{wenn } |t| \ge 1 \end{cases}$$

- 1. g(t) ist unendlich oft differenzierbar
- 2. Tr(g) = [-1, 1].

Dazu bilden wir für $k = 1, 2, 3, \dots$ auf \mathbb{R}^n die Funktionen

$$\delta_k(x) := \frac{k^n}{c} \cdot g(|kx|) \quad \text{mit } c := \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|) \, dx$$

Dabei ist wie immer | | die euklidische Norm im \mathbb{R}^n . Es gilt

- 1. δ_k ist unendlich oft differenzierbar auf \mathbb{R}^n
- 2. $Tr(\delta_k) = K_{\frac{1}{k}}(0)$
- 3. $\delta_k(x) \geq 0$ für alle x und $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x) dx = 1$

Lemma 2. Für jede stetige Funktion f mit kompaktem Träger strebt die Folge $f_k := \delta_k * f$ gleichmäßig gegen f.

Beweis:

$$(\delta_k * f)(y) - f(y) = \int \delta_k(x) [f(y - x) - f(y)] dx \quad \text{nach 3.}$$

Sei $\epsilon>0\,.$ Dafgleichmäßig stetig, gibt es $k_0\in\mathbb{N}$ mt

$$|f(y-x) - f(y)| < \epsilon$$
 sobald $|x| < \frac{1}{k_0}$

Dann ist

$$\int \delta_k(x)[f(y-x)-f(y)] dx = \int_{|x| \le \frac{1}{k}} \delta_k(x)[f(y-x)-f(y)] dx < \epsilon \int \delta_k(x) dx = \epsilon$$

sobald $k > k_0$, qed.

Jetzt können wir den Approximationssatz 39 wesentlich verbessern: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und J-meßbar und $f \in R_1(U)$. Nach Satz 39 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c^0(U)$ mit

$$|f - g|_{1,U} < \epsilon$$

Der Träger von g ist ein Kompaktum $C \subset U$.

Chat einen positiven Abstandrvom Komplement U'von U. Sei $k>\frac{2}{r}$. Nach Beh 14 ist

$$Tr(\delta_k * g) \subset \overline{K_{\frac{1}{r}}} + C \subset U$$

Nach Lemma 1 ist $\delta_k * g$ unendlich oft differenzierbar, und

$$|\delta_k * g - f|_{1,U} \le |\delta_k * g - g|_{1,U} + |g - f|_{1,U}$$

Nach Lemma 2 strebt die Folge $\delta_k * g$ gleichmäßig gegen g. Es gibt also $k_1(>\frac{2}{r})$ so daß

$$|(\delta_k * g)(y) - g(y)| < \epsilon$$
 für alle $k > k_1$ und alle y

Es folgt

$$|\delta_k * g - f|_{1,U} \le \epsilon vol(U) + \epsilon$$

Damit ist bewiesen

Satz 40. C_c^{∞} ist dicht in $R_1(U)$ bezüglich der Norm $| \cdot |_{1,U}$.

16. Anwendungen der Transformationsformel und des Satzes von Fubini zur Berechnung einiger Integrale

Funktionen F(x), die nur von |x| abhängen, integriert man, indem man Polarkoordinaten einführt. Man setzt |x|=r. Nehmen wir einmal an, daß $x_1^2+x_2^2\neq 0$ sei. Dann ist $x_n^2< r^2$, und es gibt genau einen Winkel $\phi_{n-1}\in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ mit $x_n=r\sin\phi_{n-1}$. Zudem ist $x_{n-1}^2< r^2-x_n^2=r^2\cos^2\phi_{n-1}$. Also gibt es genau einen Winkel $\phi_{n-2}\in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ mit $x_{n-1}=r\cos\phi_{n-1}\sin\phi_{n-2}$. So fortfahrend erhält man eindeutig bestimmte Winkel $\phi_{n-1},...,\phi_2\in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ mit $x_k=r\sin\phi_{k-1}\cos\phi_k....\cos\phi_{n-1}$ für alle $k\geq 3$. Schließlich

ist $x_1^2+x_2^2=r^2-x_n^2-...-x_3^2=r^2\cos^2\phi_2....\cos^2\phi_{n-1}$. Wenn nun $\begin{pmatrix} x_1\\x_2 \end{pmatrix}$ nicht auf dem Halbstrahl $x_2=0,\ x_1\geq 0$ liegt, dann gibt es genau einen Winkel $\phi_1\in(0,2\pi)$, so daß $x_1,...,x_n$ aus $r,\phi_1,...,\phi_{n-1}$ durch die Transformation

$$\begin{array}{rclcrcl} & x_1 & = & r\cos\phi_1\cos\phi_2....\cos\phi_{n-1} \\ & x_2 & = & r\sin\phi_1\cos\phi_2.....\cos\phi_{n-1} \\ & x_3 & = & r\sin\phi_2.....\cos\phi_{n-1} \\ & \vdots & & & \\ & x_{n-1} & = & r\sin\phi_{n-2}\cos\phi_{n-1} \\ & x_n & = & r\sin\phi_{n-1} \end{array}$$

hervorgehen. Man nennt $r, \phi_1,, \phi_{n-1}$ die Polarkoordinaten von x. Die Transformation Φ bildet die offene Menge

$$U: r > 0, \ 0 < \phi_1 < 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} < \phi_i < \frac{\pi}{2} \text{ für } i = 2, ..., n-1$$

bijektiv auf die offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ab, die dadurch entsteht, daß man aus \mathbb{R}^n den Teil $x_1 \geq 0$ der Hyperebene $x_2 = 0$ entfernt. Dieser letzte trifft jeden Quader im \mathbb{R}^n in einer Jordan-Nullmenge, und man kann ihn beim Integrieren ignorieren.

Wir berechnen die Determinante der Jacobimatrix $D\Phi$ von Φ durch Induktion. Dazu sei $\tilde{\Phi}$ die Transformation auf Polarkoordinaten im \mathbb{R}^{n+1} . Man erhält

$$D\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi_n \cdot D\Phi & (-r\sin \phi_n) \cdot \text{ 1.Spalte von } D\Phi \\ \sin \phi_n & 0 & \dots & 0 & r\cos \phi_n \end{pmatrix}$$

Entwickelt man nach der letzten Zeile, so erhält man

$$\det D\tilde{\Phi} = (-1)^n \sin \phi_n (-r \sin \phi_n) \cdot (-1)^{n-1} \det D\Phi \cdot (\cos \phi_n)^{n-1} + r \cos \phi_n \cdot (\cos \phi_n)^n \cdot \det D\Phi$$
$$= r(\cos \phi_n)^{n-1} \det D\Phi$$

Für n=2 ist

$$\det D\Phi = \begin{vmatrix} \cos \phi_1 & -r \sin \phi_1 \\ \sin \phi_1 & r \cos \phi_1 \end{vmatrix} = r$$

Daraus folgt rekursiv

$$\det D\Phi = r^{n-1}\cos^{n-2}\phi_{n-1}....\cos^2\phi_3\cos\phi_2$$

Dieser Wert ist auf U stets positiv. Die Transformationsformel lautet also hier (unter Benutzung von Fubini)

(1)
$$\int_{|x| \le R} f(|x|) dx = c_n \int_0^R r^{n-1} f(r) dr$$

mit

(2)
$$c_n = \int_{0 < \phi_1 < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \phi_i < \frac{\phi}{2}, i = 2, ..., n-1} \cos^{n-2} \phi_{n-1} \cos \phi_2 \ d(\phi_1,, \phi_{n-1}) = 2\pi \prod_{j=1}^{n-2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^j \phi \ d\phi$$

Bedeutung von c_n : Nimmt man speziell f=1 auf $|x| \leq R$ (und =0 sonst), so steht auf der linken Seite das Volumen der n-dimensionalen Kugel K_R vom Radius R. Aus (1) erhält man

$$vol(K_R) = c_n \cdot \frac{R^n}{n}$$

Nimmt man $f(r) = e^{-r^2}$, so erhält man zunächst für n = 2

$$\int_{x^2+y^2 < R^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = c_2 \int_0^R r e^{-r^2} dr = c_2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{R^2} e^{-u} du = \frac{c_2}{2} (1 - e^{-R^2})$$

Nach (2) ist $c_2 = 2\pi$. Also strebt die rechte Seite gegen π für $R \to \infty$. Auf der linken Seite ergibt sich für $R \to \infty$ derselbe Grenzwert wie wenn man statt über die Kreise $x^2 + y^2 \le R^2$ über die Quadrate $|x| \le R, |y| \le R$ integrieren würde

denn der Unterschied zwischen dem Integral über das Quadrat und dem Integral über die einbeschriebene (und auch dem über die umbeschiebene) Kreisscheibe ist kleiner als (Funktionswert auf der inneren Kreislinie) mal (Fläche des Kreisrings), also $< e^{-R^2} \cdot \pi R^2$, und das geht gegen 0 für $R \to \infty$. Also strebt das linke Integral für $R \to \infty$ (mit Benutzung von Fubini) gegen $(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)^2$. Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Mit demselben Argument sieht man für $\,n\geq 2\,$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{|x| \le R} e^{-|x|^2} d(x_1, ..., x_n) = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$$

Aus (1) folgt für $R \to \infty$

$$\pi^{\frac{n}{2}} = c_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2} - 1} e^{-u} du = \frac{c_n}{2} (\frac{n}{2} - 1) \int_0^\infty u^{\frac{n}{2} - 2} e^{-u} du = \dots = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2} - 1} e^{-u} du = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2} - 1} e^{-u} du = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2} - 1} e^{-u} du = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2} - 1} e^{-u} du = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2} - 1} e^{-u} du = \frac{c_n}{2} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr =$$

$$= \begin{cases} \frac{c_n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)....\cdot 2\cdot 1\cdot \int_0^\infty e^{-u}du = \frac{c_n}{2}(\frac{n}{2}-1)\,! & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \frac{c_n}{2}(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-2)....\cdot \frac{3}{2}\cdot \int_0^\infty \sqrt{u}e^{-u}du = \frac{c_n}{2}\cdot \frac{(n-2)\cdot...\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{2^{\frac{n-1}{2}}}\sqrt{\pi} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich die Konstante

$$c_n = \begin{cases} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2}-1)!} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2)} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und daraus das Volumen der Einheitskugel (R=1) im \mathbb{R}^n zu

$$vol(K_1) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n}{2}!} \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es geht gegen 0 für $n \to \infty$.

Spezielle Integrale:

1. Sei K eine J-meßbare Teilmenge im \mathbb{R}^3 , und für jedes z sei

$$K_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K \right\}$$

DaKbeschränkt ist, gibt esa>0mit $K_z=\emptyset$ für |z|>a. Nach Fubini ist

$$vol(K) = \int_{K} d(x, y, z) = \int_{-a}^{a} (\int_{K_{z}} d(x, y)) dz$$

Folgerung: Wenn zwei Körper im \mathbb{R}^3 in jeder Höhe z=const flächengleiche Schnitte haben, so haben sie dasselbe Volumen. (Prinzip des Cavalieri).

Beispiel: Sei B eine J-meßbare Menge in der x,y Ebene und $\begin{pmatrix} 0\\0\\h \end{pmatrix}$ ein fester Punkt der z-Achse (h>0). Die Menge

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 - x \\ 0 - y \\ h - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \lambda)x \\ (1 - \lambda)y \\ \lambda h \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B, \ 0 \le \lambda \le 1 \right\}$$

heißt der Kegel über B mit Spitze $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$. Die Punkte von K in Höhe z gehören zu $\lambda = \frac{z}{h}$, und K_z geht aus B hervor durch Multiplikation mit $1 - \frac{z}{h}$. Nach der Integraltransformationsformel ist der Flächeninhalt von K_z das $(1 - \frac{z}{h})^2$ -fache des Flächeninhalts von B. Mit Fubini folgt

$$vol(K) = \int_{0}^{h} (1 - \frac{z}{h})^{2} vol(B) \ dz = \frac{h}{3} vol(B)$$

Archimedes hat auf diese Weise das Volumen der Kugel mit Radius R im \mathbb{R}^3 bestimmt:

Sei A der Körper, der entsteht, wenn man aus dem Kreiszylinder mit Radius R und Höhe R den Kegel ausbohrt, dessen Spitze der Mittelpunkt der Grundfläche und dessen Basis B die Deckfläche des Zylinders

ist. Die Schnittfläche von A mit der Ebene z=c ist der Kreisring mit äußerem Radius R und innerem Radius c, sie hat also den Flächeninhalt $\pi(R^2-c^2)$. Dieselbe Ebene trifft die Halbkugel in der Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{R^2-c^2}$ mit demselben Flächeninhalt.

Nach Cavalieri ist das Volumen der Halbkugel =

$$vol(A) = \text{Zylindervolumen} - \text{Kegelvolumen} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Die Kugel hat also das Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$.

2. Rohrkreuzung: Die Achsen zweier Kreiszylinder mit gleichem Radius R mögen sich senkrecht schneiden. Das Volumen des Raumteils A, der zu beiden Zylindern gehört, ist

$$vol(A) = \int_{y^2 + z^2 \le R^2, x^2 + z^2 \le R^2} d(x, y, z)$$

Der Schnitt von A mit der Ebene z=a ist ein Quadrat mit den Seiten $2\sqrt{R^2-a^2}$. Nach Fubini ist

$$vol(A) = \int_{-R}^{R} 4(R^2 - z^2) dz = 4 \Big|_{-R}^{R} (R^2 z - \frac{1}{3} z^3) = \frac{16}{3} R^3$$

3. Der Schwerpunkt seiner Massenverteilung ρ ist komponentenweise gegeben durch

$$s_i = \frac{1}{M} \int x_i \rho(x) \ d(x_1, ..., x_n)$$

wobei $M:=\int \rho(x)\,dx$ die Gesamtmasse ist. Berechne den Schwerpunkt des mit $\rho=1$ belegten elliptischen Paraboloids $x^2+y^2\leq 2pz, 0\leq z\leq h$. Er liegt aus Symmetriegründen auf der z-Achse.

Seine z-Koordinate ζ ist gegeben durch

$$\zeta \int_{x^2+y^2 \leq 2pz, 0 \leq z \leq h} d(x,y,z) = \int_{x^2+y^2 \leq 2pz, 0 \leq z \leq h} z d(x,y,z)$$

Das linke Integral ist nach Fubini

$$\int_0^h 2pz\pi \, dz = p\pi h^2$$

Das rechte ist

$$\int_0^h z \cdot 2pz\pi \, dz = \frac{2}{3}ph^3\pi$$

Es folgt

$$\zeta = \frac{2}{3}h$$

4. Ein in der Halbebene $x \ge 0$ der x, z-Ebene befindliches Flächenstück F werde um die z-Achse gedreht.

Dabei entsteht die Punktmenge

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} \in F, \ 0 \le \phi < 2\pi \right\}$$

Mit Hilfe von Zylinderkoordinaten $\,x=r\cos\phi,\,y=r\sin\phi\,\,,z=z\,$ erhält man

$$vol(K) = \int_{\binom{r}{z} \in F, \ 0 \le \phi < 2\pi} d(x, y, z) = \int_{\binom{r}{z} \in F, \ 0 \le \phi < 2\pi} rdr \, d\phi \, dz = 2\pi \int_{F} xdx \, dz$$

Nach Beispiel 3 ist das letzte Integral gleich der x-Koordinate des Schwerpunkts von F, multipliziert mit dem Flächeninhalt von F. Es folgt die

Erste **Guldinsche Regel**: Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Inhalt der gedrehten Fläche mal dem Weg ihres Schwerpunkts.

Beispiel: Ein Torus entsteht durch Drehung eine Kreises vom Radius r mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (wobei a > r) um die z-Achse.

Der Schwerpunkt des Kreises ist sein Mittelpunkt, er legt bei der Drehung den Weg $2\pi a$ zurück. Die Fläche des Kreises ist πr^2 . Das Volumen des Torus ist also

$$vol(T) = 2\pi a \cdot \pi r^2$$

5. Das Potential einer Massenverteilung $\rho(x)$ im Punkte a ist

$$U(a) = \int \frac{\rho(x) \, dx}{|x - a|}$$

Wir berechnen das Potential der Kugelschale $R_1 \leq |x| \leq R_2$ mit der konstanten Massendichte $\rho=1$ im Punkte a, den wir aus Symmetriegründen auf der z-Achse annehmen können. Nach einem kleinen Bezeichnungswechsel ist

$$U(a) = \int_{R_1^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R_2^2} \frac{d(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}$$

Nach Übergang zu Polarkoordinaten wird

$$U(a) = \int_{R_1 \le r \le R_2, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \phi \le 2\pi} \frac{r^2 \cos \theta \, dr \, d\phi \, d\theta}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \theta + a^2}}$$

Setzt man $\sin \theta = u$, so wird daraus

$$U(a) = 2\pi \int_{-1 \le u \le 1, R_1 \le r \le R_2} \frac{r^2 dr du}{\sqrt{r^2 - 2aru + a^2}}$$

Man integriert zuerst nach u und erhält

$$U(a) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot \frac{2}{-2ar} \cdot \left\{ \sqrt{(r-a)^2} - \sqrt{(r+a)^2} \right\} dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi r}{a} \cdot (|r+a| - |r-a|) dr$$

Erster Fall: $R_1 > a$:

$$U(a) = \frac{2\pi}{a} \int_{R_1}^{R_2} r \cdot 2a \ dr = 2\pi (R_2^2 - R_1^2)$$

Zweiter Fall: $R_2 < a$:

$$U(a) = \frac{2\pi}{a} \int_{R_1}^{R_2} 2r^2 dr = \frac{4\pi}{3a} (R_2^3 - R_1^3)$$

Den Fall $R_1 < a < R_2$ setzt man mit Grenzübergang $a \pm \epsilon \rightarrow a$ aus diesen beiden zusammen und erhält

$$U(a) = \frac{4\pi}{3a}(a^3 - R_1^3) + 2\pi(R_2^2 - a^2) = 2\pi R_2^2 - \frac{4\pi R_1^3}{3a} - \frac{2\pi}{3}a^2$$

Beobachtung: In einem Punkt außerhalb der Kugelschale ($a>R_2$) ist das Potential = $\frac{1}{a}$ M, wobei $M=\frac{4\pi}{3}(R_2^3-R_1^3)$ die Masse der Kugelschale ist. Es ist genau so groß wie das Potential einer Kugel gleicher Masse mit Mittelpunkt im Nullpunkt, deren Radius < a ist. Im Innern ($a<R_1$) ist das Potential unabhängig von a.

6. Das Trägheitsmoment einer Massenverteilung ρ bei Drehung um die z-Achse ist

$$T_z = \int \rho(x)(x^2 + y^2) \ d(x, y, z)$$

Speziell bei der mit $\rho=1$ belegten Kugel $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ ist es

$$T_z = \int_{x^2 + y^2 + z^2 \le R^2} (x^2 + y^2) \ d(x, y, z)$$

Aus Symmetriegründen ist $T_x = T_y = T_z$, also

$$T_z = \frac{1}{3}(T_x + T_y + T_z) = \frac{2}{3} \int_{x^2 + y^2 + z^2 \le R^2} (x^2 + y^2 + z^2) d(x, y, z) =$$

$$\frac{2}{3} \int_{0 \le r \le R, 0 \le \phi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}} r^2 \cdot r^2 \cos \theta \, dr \, d\phi \, d\theta = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5} \, M \cdot R^2$$

wobei M die Masse der Kugel ist.

7. Das Trägheitsmoment des Ellipsoids $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$ mit $\rho = 1$ bei Drehung um die z-Achse kann man auch so ausrechnen: Man berechnet zunächst mit Fubini

$$\int_{E} x^{2} d(x, y, z) = \int_{-a}^{a} x^{2} \left(\int_{F_{x}} d(y, z) \right) dx$$

Dabei ist F_x die Ellipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1-\frac{x^2}{a^2}$. Diese hat die Halbachsen $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ und $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Der Flächeninhalt einer Ellipse ist das Produkt der Halbachsen mal π . Es folgt

$$\int_{E} x^{2} d(x, y, z) = \int_{-a}^{a} x^{2} \cdot bc(1 - \frac{x^{2}}{a^{2}})\pi \ dx = \frac{4}{15} abc \pi \cdot a^{2}$$

Genauso findet man $\int_E y^2$, und zusammen

$$T_z = \frac{4}{15} abc\pi \left(a^2 + b^2\right)$$

Für a = b = c ergibt sich natürlich dasselbe wir oben.

8. Die von der Massenverteilung ρ auf eine im Nullpunkt befindliche Einheitsmasse ausgeübte Anziehungskraft hat die Komponenten

$$K_i = \gamma \cdot \int \frac{x_i \rho(x)}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} d(x_1, \dots, x_n)$$

Berechne die Anziehungskraft für einen mit $\, \rho = 1 \,$ belegten Kegelstumpf $\, x^2 + y^2 \leq \lambda^2 z^2, \epsilon \leq z \leq h \,$.

Wenn $\epsilon=0$, dann existiert das Integral nicht in dem von uns bisher erklärten Sinne, weil der Integrand an der Spitze des Kegels nicht beschränkt ist. Deshalb nehmen wir zuerst $\epsilon>0$ an. Aus Symmetriegründen ist $K_x=K_y=0$, und bis auf den konstanten Faktor γ ist

$$K_z = \int_{x^2 + y^2 \le \lambda^2 z^2, \epsilon \le z \le h} \frac{z \, d(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Mit Zylinderkoordinaten ist das

$$= \int_{r^2 \le \lambda^2 z^2, \epsilon \le z \le h} \frac{zr \, dr \, d\phi \, dz}{\sqrt{r^2 + z^2}^3} = \frac{\pi}{2} \int_{0 \le u \le \lambda^2 t, \epsilon^2 \le t \le h^2} \frac{du \, dt}{\sqrt{u + t^3}} = 2\pi (1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}})(h - \epsilon)$$

Hiervon existiert der Limes für $\,\epsilon \to 0\,,$ er ist

$$= 2\pi h(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}) = 2\pi h(1 - \frac{h}{l})$$

wobei $\,l\,$ die Länge der Mantellinie des Kegels ist.

17. Kurven

Definition; Eine parametrisierte Kurve im \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung γ eines Intervalls I in den \mathbb{R}^n :

Eine parametrisierte Kurve ist mehr als die Punktmenge $\gamma(I)$; die Abbildung γ enthält zusätzliche Information. Zum Beispiel ist

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t < 2\pi$$

der einmal im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t < 2\pi$$

der im Uhrzeigersinn einmal durchlaufene Einheitskreis, und

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t < 2\pi$$

der zweimal (positiv) durchlaufene Einheitskreis.

Weitere Beispiele:

1.

$$\begin{array}{rcl} x & = & a\cos t \\ y & = & b\sin t \end{array}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

Ellipse mit den Halbachsen a und b

2.

$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos t \\ y & = & r\sin t \;, \quad 0 \leq t < 2\pi \\ z & = & \frac{h}{2\pi}t \end{array}$$

Schraubenlinie mit der Ganghöhe $\,h\,.$ Sie liegt auf dem Zylinder $\,x^2+y^2=r^2\,.$

3. Wenn die Einheitskreisscheibe auf der x-Achse abrollt, so beschreibt der Punkt P ihres Randes, der zu Beginn im Nullpunkt lag, eine sogenannte Zykloide.

Bezeichnet t die Länge des Kreisbogens, der schon abgerollt ist (vgl. Zeichnung), so liegt der Mittelpunkt

des Kreises jetzt in $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, und für die Koordinaten x,y von P gilt

$$x(t) = t - \cos(t - \frac{\pi}{2}) = t - \sin t$$

 $y(t) = 1 + \sin(t - \frac{\pi}{2}) = 1 - \cos t$

Ab jetzt setzen wir immer voraus, daß γ stetig differenzierbar sei. Ist $\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix} \neq 0$, so heißt

der Vektor $\gamma'(t_0)$ Tangentenvektor an die Kurve im Punkte $\gamma(t_0)$. Die durch die Parameterdarstellung

$$x = \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

beschriebene Gerade heißt die Tangente an die Kurve im Punkte $\gamma(t_0)$.

Warnung! Die Tangente hängt tatsächlich von t_0 und nicht nur von der Stelle $\gamma(t_0)$ ab. Zum Beispiel kann eine Kurve zweimal durch denselben Punkt laufen und beim zweiten Mal eine andere Tangente haben als beim ersten: Für

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$$

in \mathbb{R}^2 ist

$$\gamma(1) = \gamma(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aber } \gamma'(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \gamma'(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die beiden Tangenten sind die Winkelhalbierenden $x = \pm y$

Bogenlänge: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve. Zu einer Teilung $T : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ des Intervalls [a, b] gehört ein Sehnenzug

Die Länge des Sehnenzuges ist

$$l(T) = \sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

Definition: Die Kurve γ heißt rektifizierbar, wenn es eine Schranke L gibt, so daß alle Sehnenzuglängen $\leq L$ sind. Ist das der Fall, so heißt das Supremum aller Sehnenzuglängen die Länge $l(\gamma)$ der Kurve γ .

Satz 41. Wenn γ stetig differenzierbar ist, dann ist γ sicher rektifizierbar, und

(1)
$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + \dots + x_n'^2} dt \qquad ('= Ableitung nach t)$$

Beweis: Nach Definition der Norm im Euklidischen \mathbb{R}^n und nach dem Mittelwertsatz ist

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'(\tau_{ij})^2 (t_i - t_{i-1})^2}$$
$$= (t_i - t_{i-1}) \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j'(\tau_{ij})^2}$$

Dabei sind die τ_{ij} Zwischenwerte in (t_{i-1}, t_i) , die unglücklicherweise a priori nicht nur von i sondern auch noch von j abhängen. Nun sind aber die x'_j stetig, auf dem kompakten Intervall [a, b] also sogar gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein passendes $\delta > 0$, so daß

$$|x_i'(t) - x_i'(\tau)| < \epsilon$$
 für alle j und alle $t, \tau \in [a, b]$, sobald $|t - \tau| < \delta$

Macht man also die Einteilung des Intervalls [a,b] feiner als δ , so ist $|x_j'(t) - x_j'(\tau)| < \epsilon$ für alle $t,\tau \in [t_{i-1},t_i]$, und

$$|\sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_{i}) - \gamma(t_{i-1})| - \int_{a}^{b} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x'_{j}(t)^{2}} dt |$$

$$= |\sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} {\{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x'_{j}(\tau_{ij})^{2}} - \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x'_{j}(t)^{2}} \} dt |}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} |\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x'_{j}(\tau_{ij})^{2}} - \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x'_{j}(t)^{2}} | dt$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x'_{j}(\tau_{ij}) - x'_{j}(t_{i}))^{2}} dt \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

$$\leq \epsilon \sqrt{n} \cdot (b - a)$$

Daraus folgt schnell die Behauptung: Nach Definition des Supremums (und von $l(\gamma)$ als Supremum) gibt es zu $\epsilon > 0$ eine Teilung T_1 mit

$$l(\gamma) - \epsilon \le l(T_1) \le l(\gamma)$$

Wie eben gesehen, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle Teilungen mit Feinheit $< \delta$

$$|l(T) - \int_{a}^{b} | < \epsilon$$

Sei T_2 irgendeine Teilung feiner als δ . Dann ist die gemeinsame Verfeinerung T von T_1 und T_2 erst recht feiner als δ , und

$$l(\gamma) \le l(T_1) + \epsilon \le l(T) + \epsilon \le \int_a^b +2\epsilon \le l(T) + 3\epsilon \le l(\gamma) + 3\epsilon$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung: Die bloße Stetigkeit reicht nicht für Rektifizierbarkeit: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig und

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

ist eine stetige Kurve. An den Stellen $x=\frac{2}{k\pi}, \ k=1,....,4N+1$ sind die Koordinaten der Kurvenpunkte

Die Sehnenzuglänge ist bestimmt größer als

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{2k+1}$$

Da die harmonische Reihe divergiert, kann man dies durch Wahl von N so groß machen wie man will. Also ist die Menge der Sehnenzuglängen nicht beschränkt.

Beispiele zur Längenberechnung:

1. Die Länge des Kreisbogens $x=\cos t, \ y=\sin t, \ 0\leq t\leq \alpha$ ist

$$\int_0^\alpha \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \alpha$$

2. Für den Zyloidenbogen $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$ ist $x'=1-\cos t$ und $y'=\sin t$, also die Länge des Bogens $0\leq t\leq 2\pi$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \, dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2} \, dt = -4|_0^{\pi} \cos t = 8$$

Parameterwechsel: Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Ein Parameterwechsel ist eine

bijektive Abbildung σ von I auf ein Intervall J, so daß σ und σ^{-1} stetig differenzierbar sind. $\beta:=\gamma\circ\sigma^{-1}:J\to\mathbb{R}^n$ hat dasselbe Bild wie γ . Die mit β und γ in einem Kurvenpunkt berechneten Tangentenvektoren unterscheiden sich um den Faktor $\frac{d\sigma}{dt}$, sind also proportional.

Besonders häufig parametrisiert man um auf Bogenlänge: Es ist üblich, die Ableitung nach irgendeinem Parameter t (unter dem man sich die Zeit vorstellen mag, während der die Kurve durchlaufen wird) mit einem Punkt zu bezeichnen. Die Bogenlänge $s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau$ ist eine streng monoton wachsende Funktion mit der Ableitung

$$\dot{s}(t) = |\dot{\gamma}(t)|$$

und besitzt daher eine Umkehrfunktion t(s). Wenn γ regulär, das heißt wenn $\dot{\gamma}$ stets $\neq 0$, dann ist diese auch stetig differenzierbar. Es ist üblich, die Ableitung nach der Bogenlänge s mit 'zu bezeichnen. Ist nun $\beta(s) := \gamma(t(s))$, so ist nach der Kettenregel

$$\dot{\gamma}(t) = \beta'(s)\dot{s}$$

und da $\dot{s} = |\dot{\gamma}|$, folgt $|\beta'(s)| = 1$.

In Worten: Ist die Kurve durch die Bogenlänge parametrisiert, so haben alle Tangentenvektoren die Länge 1. Das hat insbesondere zur Folge, daß β' senkrecht steht auf β'' , denn die Ableitung von $(\beta', \beta') = 1$ ist 0.

 $\operatorname{Im} \mathbb{R}^2$ kann man Kurven auch durch eine Gleichung

$$f(x,y) = 0$$

beschreiben. Sei $\binom{a}{b}$ ein Punkt auf der Kurve, also f(a,b)=0. Wenn $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$, dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen offene Intervalle $U\ni a$ und $V\ni b$ und eine Funktion $\phi:U\to V$, so daß

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$$
 für alle $x \in U, y \in V$

Jedenfalls in der Nähe der Stelle $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ hat man für die Kurve die Parameterdarstellung

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \quad t \in U$$

Tangentenvektor im Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist $\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{\phi}(a) \end{pmatrix}$, und die Parameterdarstellung der Tangente ist

$$x = a + \lambda, \quad y = b + \lambda \dot{\phi}(a)$$

Dies kann man natürlich auch als geschlossene Geradengleichung schreiben:

$$u = b + \dot{\phi}(a)(x - a)$$

Nach der Kettenregel ist

$$\partial_x f(x,\phi(x)) + \partial_u f(x,\phi(x))\dot{\phi}(x) = 0$$

Hiermit kann man die Gleichung der Tangente umschreiben auf

$$\partial_x f(a,b)(x-a) + \partial_y f(a,b)(y-b) = 0$$

Kurven in \mathbb{R}^2 kann man auch durch eine Gleichung in den Polarkoordinaten beschreiben, zum Beispiel Spiralen der Art $r = f(\phi)$. Hier ein anderes Beispiel:

Wo liegen alle Punkte, für die das Verhältnis des Abstands von einem festen Punkt zu einer festen Geraden einen festen Wert ϵ besitzt? Seiner Natur nach ist $\epsilon > 0$.

Wir legen den Punkt in den Ursprung den Koordinatensystems und die Gerade auf x=-p.

Ist $\epsilon = 1$, so erhalten wir

$$(x+p)^2 = x^2 + y^2$$
, also $y^2 = 2px + p^2$

Dies ist die Gleichung einer Parabel mit Brennpunkt in 0. Wenn $\epsilon \neq 1$, dann erhalten wir in Polarkoordinaten die Gleichung

$$r = \epsilon(p + r\cos\phi)$$

und das können wir ($\epsilon \neq 1$) umformen zu

$$(1) r = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon \cos \phi}$$

Behauptung: Die Gleichung (1) stellt einen Kegelschnitt dar. Beweis: Man formt um auf cartesische Koordinaten:

$$x^{2} + y^{2} = \epsilon^{2}(p+x)^{2}$$
$$(1 - \epsilon^{2})x^{2} - 2\epsilon^{2}px + y^{2} = \epsilon^{2}p^{2}$$
$$(x - \frac{\epsilon^{2}p}{1 - \epsilon^{2}})^{2} + \frac{y^{2}}{1 - \epsilon^{2}} = \frac{\epsilon^{2}p^{2}}{(1 - \epsilon^{2})^{2}}$$

Dies ist (mit auf der x-Achse verschobenem Mittelpunkt) für $\epsilon < 1$ eine Ellipse mit den Achsen

$$a = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2}$$
 und $b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$

Für $\epsilon > 1\,$ handelt es sich um eine Hyperbel.

Die Sektorfläche: Gegeben sei eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ Wir nehmen an, daß die Verbindungsstrecke eines jeden Kurvenpunktes mit dem Nullpunkt die Kurve in keinem weiteren Punkte trifft.

Eine solche Verbindungsstrecke nennt man auch einen Fahrstrahl an die Kurve. Die Fahrstrahlen überstreichen das Flächenstück

$$F = \{\lambda \cdot \gamma(t) \mid 0 < \lambda < 1, \ a < t < b\}$$

und $\binom{\lambda}{t} \mapsto \lambda \cdot \gamma(t)$ ist injektiv und stetig differenzierbar. Nach der Integraltransformationsformel ist

$$\int_{F} d(x,y) = \int_{0 \le \lambda \le 1, a \le t \le b} |\det \begin{pmatrix} \gamma_{1}(t) & \lambda \dot{\gamma}_{1}(t) \\ \gamma_{2}(t) & \lambda \dot{\gamma}_{2}(t) \end{pmatrix} | d(\lambda,t) = \frac{1}{2} \int_{a}^{b} (\gamma_{1} \dot{\gamma}_{2} - \gamma_{2} \dot{\gamma}_{1}) dt \text{ (Fubini)}$$

falls die Klammer positiv ist (das bedeutet, daß das Paar (Strahl, Tangente) positiv orientiert ist). Diesen Spezialfall der Transformationsformel erhält man auch durch folgende (mehr anschauliche) Betrachtung:

$$Z: t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

sei eine Zerlegung des Parameterintervalls. Das Dreieck, das von den Vektoren $\gamma(t_{i-1})$ und $\gamma(t_i)$ aufgespannt wird, hat nach Kap 4 den (orientierten) Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\det(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x(t_{i-1}) & x(t_i) \\ y(t_{i-1}) & y(t_i) \end{vmatrix}$$

Wir summieren

$$2F(Z) := \sum_{i=1}^{n} (x(t_{i-1})y(t_i) - x(t_i)y(t_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{x(t_{i-1})(y(t_i) - y(t_{i-1})) - (x(t_i) - x(t_{i-1}))y(t_{i-1})\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{x(t_{i-1})\dot{y}(\tau_i) - y(t_{i-1})\dot{x}(\sigma_i)\} \cdot (t_i - t_{i-1})$$

mit Zwischenwerten $\sigma_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Wir schätzen ab:

$$|2F(Z) - \int_{a}^{b} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt| =$$

$$|\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} \{ [x(t_{i-1})\dot{y}(\tau_{i}) - y(t_{i-1})\dot{x}(\sigma_{i})] - [x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)] \} dt| \le$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_{i}} \{ |x(t_{i-1})\dot{y}(\tau_{i}) - x(t)\dot{y}(t)| + |y(t_{i-1})\dot{x}(\sigma_{i}) - y(t)\dot{x}(t)| \} dt$$

Da x und y stetig differenzierbare Funktionen von t sind, sind sie und ihre Ableitungen auf dem Intervall [a,b] sogar gleichmäßig stetig. Zu $\epsilon>0$ kann man also die Teilung Z so fein machen, daß sie alle in jedem Teilintervall um höchstens ϵ schwanken. Ist M eine gemeinsame Schranke für ihre Beträge, so kann man also abschätzen

$$|F(Z) - \int_a^b (x\dot{y} - y\dot{x}) dt| \le 4M \epsilon(b-a)$$

Der orientierte Flächeninhalt, den der Fahrstrahl vom Nullpunkt an die Kurve überstreicht, ist

$$\frac{1}{2} \int_{a}^{b} (x\dot{y} - y\dot{x}) \, dt$$

Sektorformel

Beispiele: 1. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \pi$$

2. $x = 2 + \cos t$, $y = \sin t$, $-\alpha \le t \le \alpha$

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} (2\cos t + 1) dt = \frac{1}{2} (4\sin \alpha + 2\alpha) = 2\sin \alpha + \alpha$$

3. Die Zykloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \cdot (\sin t) - (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (t \sin t - 2 + 2 \cos t) dt = \frac{1}{2} \{|_0^{2\pi} (-t \cos t) - 4\pi\} = -3\pi$$

Der orientierte Flächeninhalt ist negativ, weil das vom Fahrstrahl überstrichene Gebiet rechts vom Kurvenbogen liegt.

Anwendung: Wir wollen die Keplerschen Gesetze für die Bewegung der Planeten um die Sonne aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz herleiten. Nach dem Gravitationsgesetz ziehen zwei Massen m_1 und m_2 (die man sich jeweils im Schwerpunkt ihrer Verteilung konzentriert denkt) sich an mit einer Kraft, die dem Betrage nach = $\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ist, wobei r ihr Abstand und γ eine Konstante ist. Wir legen den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Schwerpunkt der Sonne (Masse M) und beschreiben die Bahn, die ein Planet (Masse m) unter dem Einfluß ihrer Anziehungskraft durchläuft. Befindet sich der Planet im Punkte x, so ist die Anziehungskraft in Richtung -x gerichtet:

Nach Newton ist Kraft = Masse mal Beschleunigung, also

(4)
$$-\gamma \frac{Mm}{|x|^2} \cdot \frac{x}{|x|} = m \cdot \ddot{x} \qquad (\dot{} = \text{Ableitung nach der Zeit})$$

Man setzt

$$J = mx \times \dot{x}$$
 Drehimpulsvektor

$$A = \frac{1}{\gamma mM} J \times \dot{x} + \frac{x}{|x|}$$
 Runge-Lenz Vektor

Behauptung: J und A sind konstant.

Beweis:

$$\begin{split} \dot{J} &= m\dot{x}\times\dot{x} + mx\times\ddot{x} = 0 \text{ nach } (4)\\ \dot{A} &= \frac{1}{\gamma mM}J\times\ddot{x} + (\frac{\dot{x}}{|x|} - \frac{(x,\dot{x})}{|x|^3}x) \quad (\text{ weil } \dot{J} = 0)\\ &= -\frac{1}{m|x|^3}J\times x + \frac{1}{|x|^3}((x,x)\dot{x} - (x,\dot{x})x) \quad (\text{ weil } \ddot{x} = -\frac{\gamma M}{|x|^3}x)\\ &= -\frac{1}{|x|^3}(x\times\dot{x})\times x + \frac{1}{|x|^3}((x,x)\dot{x} - (x,\dot{x})x) = 0 \quad (\text{ Graßmann-Identität, Kap } 6) \end{split}$$

Nach Definition von J verläuft die Bewegung in der zu J senkrechten Ebene. In dieser benutzen wir Polarkoordinaten mit Zentrum 0, und ϕ wird so gezählt, daß $\phi=0$ für den Vektor $A(\in J^{\perp})$. Für $x=|x|\begin{pmatrix}\cos\phi\\\sin\phi\end{pmatrix}$ ist

(1)
$$(A,x) = |A| \cdot |x|(1,0) \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = |A| \cdot |x| \cos \phi$$

Anderseits ist nach Definition von A

$$(A,x) = \frac{1}{\gamma mM} \det(J,\dot{x},x) + |x| = \frac{1}{\gamma mM} \det(\dot{x},x,J) + |x|$$

(2)
$$= -\frac{1}{\gamma M} |x \times \dot{x}|^2 + |x| = -\frac{1}{\gamma M m^2} |J|^2 + |x|$$

Ist der konstante Vektor A=0, so ist |x| konstant nach (2), das heißt der Planet bewegt sich auf einem Kreis. Ist $A\neq 0$, so zeigt Vergleich von (1) und (2) mit $\epsilon:=|A|$ und $\epsilon p:=\frac{|J|^2}{\gamma Mm^2}$, daß $|x|-\epsilon p=\epsilon|x|\cos\phi$ oder, mit r:=|x|,

(3)
$$r = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon \cos \phi}$$

Wie wir oben sahen, ist dies die Gleichung eines Kegelschnitts in Polarkoordinaten, und zwar einer Ellipse, wenn $\epsilon < 1$, und einer Hyperbel, wenn $\epsilon > 1$. (Für $\epsilon = 1$ hat die Gleichung (3) keinen Sinn, aber wir sahen oben, daß zu $\epsilon = 1$ eine Parabel gehört). Ein Brennpunkt des Kegelschnitts ist der Nullpunkt des Koordinatensystems.

Was bedeutet $\epsilon < 1$?

 ϵ war nach Definition der Betrag des Runge-Lenz Vektors, also

$$\epsilon^2 = |A|^2 = \left| \frac{1}{\gamma mM} J \times \dot{x} + \frac{x}{|x|} \right|^2$$

Da $\dot{x}\perp J\,,$ ist $\,|J\times\dot{x}|^2=|J|^2|\dot{x}|^2\,;$ ferner ist

$$(x, J \times \dot{x}) = \det(x, J, \dot{x}) = \det(J, \dot{x}, x) = (J, \dot{x} \times x) = -\frac{1}{m} |J|^2$$

Es folgt

$$|A|^2 = \frac{1}{\gamma^2 m^2 M^2} |J|^2 |\dot{x}|^2 - 2 \frac{1}{\gamma m M} \frac{1}{m|x|} |J|^2 + 1$$

$$= 1 + \frac{2|J|^2}{\gamma^2 m^3 M^2} \left(\frac{m}{2} |\dot{x}|^2 - \frac{\gamma M m}{|x|} \right) = 1 + \frac{2|J|^2}{\gamma^2 m^3 M^2} \left(E_{kin} + E_{pot} \right)$$

 $\epsilon < 1$ ist also gleichbedeutend mit $E_{kin} < |E_{pot}|$. Die Planeten haben beschränkte Umlaufbahnen; für sie kommt also von den drei Kegelschnitttypen nur die Ellipse in Frage:

1. Keplersches Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

In den cartesischen Koordinaten $x_1 = r\cos\phi$, $x_2 = r\sin\phi$ in der zu J senkrechten Bahnkurve ist $J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 \end{pmatrix}$. Da J konstant ist, ist $x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1$ konstant, und zwar (bei positiver Orientierung) $= \frac{1}{m} \cdot |J|$. Nach der Sektorformel ist die vom Fahrstrahl während des Zeitintervalls $[t_1, t_2]$ überstrichene Fläche

$$F = \frac{1}{2} \int_{1}^{t_2} (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) dt = \frac{1}{2m} |J| (t_2 - t_1)$$

Das ergibt

2. Keplersches Gesetz: Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Der Planet muß also im Perihel schneller laufen als im Aphel.

Insbesondere gilt für einen vollen Umlauf

(4)
$$T \cdot |J| = 2m \cdot F$$
 ($F = Fläche der Ellipse, $T = Umlaufszeit$)$

Anderseits ist die Fläche der Ellipse $=\pi ab$, wenn a und b die beiden Halbachsen sind. Oben haben wir für die Halbachsen der Ellipse gefunden

$$a = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2}$$
 und $b = \frac{\epsilon p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$

Daraus folgt

$$F = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = \pi a^2 \sqrt{\frac{\epsilon p}{a}}$$

Vergleicht man das mit (4), so sieht man

$$T^2 \frac{|J|^2}{4m^2} = F^2 = \pi^2 \epsilon pa^3$$

und nach Definition von ϵp folgt daraus

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \cdot a^3$$

Der Faktor $\frac{4\pi^2}{\gamma M}$ hängt nun gar nicht mehr vom Planeten, sondern nur noch von der Sonne ab! Für zwei verschiedene Planetenbahnen gilt also

3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Achsen.

Anhang zu Kap 17: (Dies wurde in der Vorlesung nicht vorgerechnet) Die Zykloide ist u.a. bekannt geworden durch eine Aufgabe, die Johann Bernoulli 1696 gestellt hat: Gesucht ist eine Kurve von A nach B, so daß ein Punkte P, der sich unter dem Einfluß der Schwerkraft von A nach B bewegt, in der kürzest möglichen Zeit in B ankommt. Die Aufgabe, eine solche Kurve zu finden, nennt man das Brachistochronen-Problem. Die Lösung ist der Zykloidenbogen, der in A beginnt und durch B geht. Dazu genügt es natürlich nicht, nur die "Einheitszykloide" von Beispiel 3 am Anfang des Kapitels zu betrachten, diese braucht (wenn sie in A anfängt) ja gar nicht durch B zu gehen. Man muß Kreise von beliebigem Radius r auf der x-Achse abrollen. Dabei entstehen die Kurven

(1)
$$x = r(\phi - \sin \phi), \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

$$y = r(1 - \cos \phi), \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

für (festes) r > 0. Die Lösung des Problems lautet nun:

Satz 42. Sei a > 0, b > 0 und Z die Zykloide (1), die in 0 beginnt und durch $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ geht (vgl. Lemma 1 unten). Dann ist die Fallzeit von 0 nach B längs einer beliebigen Kurve γ stets mindestens so lang wie die längs Z.

Eine anschauliche Begründung hierfür findet man in dem Buch von Brieskorn und Knörrer "Ebene algebraische Kurven" auf Seite 34/35. Matthias Schneider hat mir den folgenden Beweis gesagt, den ich mit seiner Erlaubnis in dieses Skript aufnehme. Um die Idee hervortreten zu lassen, führe ich einige vorbereitende Schritte vorher aus:

1. Berechnung der Fallzeit auf einer beliebigen Kurve γ :

Auf Höhe y hat der Massenpunkt (Masse m) gegenüber der Horizontalen durch 0 die potentielle Energie mgy verloren. Ist er in 0 mit der Geschwindigkeit 0 gestartet, so ist nach dem Energie-Erhaltungssatz seine kinetische Energie genau so groß:

$$\frac{m}{2}v^2 = mgy$$
, also $v = \sqrt{2gy}$

Ist $\gamma = \gamma(\tau)$ und bezeichnet t die Zeit und s die Bogenlänge, so ist die Fallzeit bis zum Punkte $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \gamma(\tau_0)$

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{s(\tau_0)} \frac{dt}{ds} ds = \int_0^{s(\tau_0)} \frac{1}{v} ds = \int_0^{\tau_0} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} d\tau \quad (\dot{z} = \frac{d}{d\tau})$$

Dies sollte man als uneigentliches Integral auffassen, da ja a priori der Integrand für y = 0 gar nicht definiert ist. In der Tat: wenn zum Beispiel die Kurve die Gestalt y = g(x) hat und wenn g'(0) = 0 ist, dann fällt der Massenpunkt gar nicht los, und die Zeit ist unendlich.

2. Zykloide durch einen gegebenen Punkt (im Nullpunkt beginnend):

Lemma 1. Für jeden Punkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit a > 0, b > 0 gibt es genau eine Zykloide

$$\begin{array}{rcl}
x & = & r(\tau - \sin \tau) \\
y & = & r(1 - \cos \tau)
\end{array}$$

deren erster Bogen durch $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ geht.

Beweis: Für alle $\tau > 0$ ist $\tau > \sin \tau$, also $\frac{1-\cos \tau}{\tau-\sin \tau}$ definiert. Es gilt (für $\tau > 0$)

$$\frac{1-\cos\tau}{\tau-\sin\tau} = \frac{\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^4}{4!} + \dots}{\frac{\tau^3}{3!} - \frac{\tau^5}{5!} + \dots} = \frac{3}{\tau} \cdot \frac{1-\frac{\tau^2}{12} + \dots}{1-\frac{\tau^2}{20} + \dots} \to \infty$$

für $\tau \searrow 0$ und

$$\frac{1 - \cos \tau}{\tau - \sin \tau}|_{\tau = 2\pi} = 0$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es zu $\frac{b}{a}$ einen Winkel τ_0 mit $0 < \tau_0 < 2\pi$ und $\frac{b}{a} = \frac{1-\cos\tau_0}{\tau_0-\sin\tau_0}$. Setzt man $r = \frac{a}{\tau_0-\sin\tau_0}$, so wird

$$a = r(\tau_0 - \sin \tau_0), \quad b = r(1 - \cos \tau_0)$$

Angenommen, es gäbe noch einen zweiten Zykloidenbogen (mit Radius r_1), der (beim Parameterwert $\tau_1 \in (0, 2\pi)$) durch $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ geht. Dann wäre

$$\frac{1 - \cos \tau_0}{\tau_0 - \sin \tau_0} = \frac{1 - \cos \tau_1}{\tau_1 - \sin \tau_1}$$

Dann hätte die Ableitung von

$$g(\tau) = \frac{1 - \cos \tau}{\tau - \sin \tau}$$

eine Nullstelle zwischen τ_0 und τ_1 . Man findet

$$g'(\tau) = \frac{\tau \sin \tau - 2(1 - \cos \tau)}{(\tau - \sin \tau)^2}$$

Der Zähler ist $\frac{\tau}{2}\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\tau}{2}-4\sin^2\frac{\tau}{2}$. Da $\sin\frac{\tau}{2}\neq 0$ für $0<\tau<2\pi$, müßte $\tau\cos\tau-4\sin\tau$ eine Nullstelle in $0<\tau<\pi$ haben. Dies ist aber nicht der Fall, wie man leicht durch Betrachtung der Kurven $y=\tan x$ und $y=\frac{x}{4}$ in $0< x<\pi$ sieht.

3. Berechnung der Fallzeit für die Zykloide: Für $x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t)$ ist

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 (1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t = 2ry$$

Nach 1. folgt für die Fallzeit T von 0 bis zum Punkt $\gamma(\tau_0)$

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \tau_0$$

4. Nach 2. bildet

(I)
$$x = r(\tau - \sin \tau)$$

$$y = r(1 - \cos \tau)$$

den Streifen $r>0,\ 0<\tau<2\pi$ bijektiv auf den Quadranten $x>0,\ y>0$ ab. Daher ist durch

$$F(x,y) = \sqrt{r} \cdot \tau$$
 (positive Wurzel)

eine Funktion F im Quadranten x > 0, y > 0 wohldefiniert. Aus (I) folgt

$$(x - r\tau)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

$$x^{2} + y^{2} + r^{2}\tau^{2} = 2r(\tau x + y) < 2r\sqrt{\tau^{2} + 1} \cdot \sqrt{x^{2} + y^{2}}$$

erst recht

$$r^2 \tau^2 < 2r \sqrt{1 + 4\pi^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

Also ist

$$F(x,y)^2 = (\sqrt{r\tau})^2 \le 2\sqrt{1+4\pi^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

und das bedeutet, daß F(x,y) gegen 0 strebt, wenn $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus dem rechten oberen Quadranten gegen 0 läuft.

5. Berechnung von ∇F und $|\nabla F|$: Nach der Kettenregel ist

$$(F_x, F_y) = (F_r, F_\phi) \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \phi_x & \phi_y \end{pmatrix}$$

$$= (F_r, F_\phi) \begin{pmatrix} x_r & x_\phi \\ y_r & y_\phi \end{pmatrix}^{-1}$$

(2)
$$= \left(\frac{\phi}{2\sqrt{r}}, \sqrt{r}\right) \begin{pmatrix} \phi - \sin \phi & r(1 - \cos \phi) \\ 1 - \cos \phi & r \sin \phi \end{pmatrix}^{-1}$$

Invertieren der Matrix: Ihre Determinante ist

$$r\sin\phi\cdot(\phi-\sin\phi)-r(1-\cos\phi)^2=r(\phi\sin\phi-2(1-\cos\phi))$$

Also ist die inverse Matrix

$$\frac{1}{r(\phi\sin\phi - 2(1-\cos\phi))} \begin{pmatrix} r\sin\phi & -r(1-\cos\phi) \\ -(1-\cos\phi) & \phi - \sin\phi \end{pmatrix}$$

Nach (2) ist

$$F_x = \frac{\frac{\phi}{2\sqrt{r}} \cdot r \sin \phi - \sqrt{r}(1 - \cos \phi)}{r(\phi \sin \phi - 2(1 - \cos \phi))} = \frac{1}{2\sqrt{r}}$$

$$F_y = \frac{-\frac{\phi}{2\sqrt{r}} \cdot r(1 - \cos \phi) + \sqrt{r}(\phi - \sin \phi)}{r(\phi \sin \phi - 2(1 - \cos \phi))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{\frac{\phi}{2}(1+\cos\phi) - \sin\phi}{-2(1-\cos\phi) + \phi\sin\phi}$$

Drei Zeilen Geduld, und wir haben $|\nabla F|^2$:

$$F_x^2 + F_y^2 = \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{4} + \left(\frac{\frac{\phi}{2} (1 + \cos \phi) - \sin \phi}{-2(1 - \cos \phi) + \phi \sin \phi} \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\frac{1}{4} [\phi^2 \sin^2 \phi - 4\phi \sin \phi (1 - \cos \phi) + 4(1 - \cos \phi)^2] + \frac{\phi^2}{4} (1 + \cos \phi)^2 - \phi \sin \phi (1 + \cos \phi) + \sin^2 \phi}{(\phi \sin \phi - 2(1 - \cos \phi))^2}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\frac{\phi^2}{4} (2 + 2\cos \phi) - 2\phi \sin \phi + 2(1 - \cos \phi)}{(\phi \sin \phi - 2(1 - \cos \phi))^2}$$

Der Nenner ist

$$\phi^{2} \sin^{2} \phi - 4\phi \sin \phi (1 - \cos \phi) + 4(1 - \cos \phi)^{2}$$

$$= (1 - \cos \phi)[\phi^{2}(1 + \cos \phi) - 4\phi \sin \phi + 4(1 - \cos \phi)]$$

$$= (1 - \cos \phi) \cdot 2 \cdot \text{Zähler}$$

Daher ist

$$|\nabla F|^2 = F_x^2 + F_y^2 = \frac{1}{2r(1-\cos\phi)} = \frac{1}{2y}$$

In dieser Formel steckt die Idee des Beweises!

6. Seien a,b>0 und $\gamma(\tau),\ 0\leq \tau\leq \tau_0$ eine stetige Kurve von 0 nach $\binom{a}{b}=\gamma(\tau_0)$, die im offenen Intervall $0<\tau<\tau_0$ stetig differenzierbar ist, und die für $\tau>0$ im Quadranten x,y>0 verläuft. Die Funktion $f(\tau)=F(\gamma(\tau))$ hat im Intervall $0<\tau<\tau_0$ nach der Kettenregel die Ableitung

$$\dot{f}(\tau) = F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y}$$

Dabei sind F_x und F_y die partiellen Ableitungen von F nach x bzw. y. Sei $0 < \tau_1 < \tau_0$ (wir lassen bald τ_1 gegen 0 gehen). Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$F(\gamma(\tau_0)) - F(\gamma(\tau_1)) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \dot{f}(\tau) d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y}) d\tau$$

$$\leq \int_{\tau_1}^{\tau_0} |\nabla F| \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\tau \quad (\text{ nach Cauchy-Schwarz})$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_0} \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2y}} d\tau \quad (\text{ nach 5.})$$

Lassen wir jetzt τ_1 gegen 0 gehen, so erhalten wir nach 4. auf der linken Seite F(a,b) und auf der rechten Seite das uneigentliche Integral, welches im Falle seiner Konvergenz bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{g}}$ die Fallzeit von 0 nach $\binom{a}{b}$ ergibt (und sonst ∞ ist), vgl. 1. Die Funktion F gibt aber (ebenfalls bis auf $\frac{1}{\sqrt{g}}$) nach 3. die Fallzeit längs des Zykloidenbogens an. Diese kann also von der Fallzeit längs einer beliebigen Kurve niemals unterschritten werden.

Übung: Man berechne die Fallzeit längs der geradlinigen Verbindung von 0 nach B und beweise, daß sie echt länger ist als die längs der Zykloide.

18. Oberflächenmessung im \mathbb{R}^3

Definition: Ein parametrisiertes Flächenstück im \mathbb{R}^3 ist eine Abbildung ϕ von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ in den \mathbb{R}^3 .

Wir nehmen stets an, daß ϕ stetig differenzierbar sei. Ziel dieses Kapitels ist, zu erklären, was die Oberfläche eines solschen Flächenstücks sein soll und diese in einigen Beispielen auszurechnen. Für Kurven hatten wir die Länge definiert als Supremum der Längen aller Sehnenzüge, die man der Kurve einbeschreiben kann. Die Fläche eines ebenen Dreiecks ist $\frac{1}{2}$ Grundlinie mal Höhe. Da man jedes ebene Polygon in Dreiecke zerlegen kann, kann man die Fläche eines ebenen Polygons berechnen und damit die Oberfläche eines Polyeders. Man könnte nun analog zum Vorgehen bei Kurven versuchen, die Oberfläche eines Flächenstücks zu erklären als Supremum der Oberflächen aller Polyeder, die man dem Flächenstück einbeschreiben kann. Daß dies zu nichts Vernünftigem führt, zeigt der Schwarzsche Stiefel:

Wir teilen den Zylindermantel $x^2+y^2=R^2,\ 0\leq z\leq h$ in m Streifen der Höhe $\frac{h}{m}$.

Auf jedem Streifenrand markieren wir äquidistant n Teilpunkte, und zwar abwechselnd so, daß die Teilpunkte auf dem oberen Rande eines Streifens über der Mitte zwischen zwei Teilpunkten auf dem unteren Rande liegen; auf dem Niveau z=0 also etwa die Punkte

$$\begin{pmatrix} R\cos\phi\\R\sin\phi\\0 \end{pmatrix} \text{ mit } \phi = 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots (n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}$$

und auf dem Niveau $z = \frac{h}{m}$ die Punkte

$$\begin{pmatrix} R\cos\phi\\ R\sin\phi\\ \frac{h}{m} \end{pmatrix} \text{ mit } \phi = \frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \dots, (2n-1) \cdot \frac{\pi}{n}$$

Verbindet man die Teilpunkte wie in der Zeichnung angegeben, so entsteht ein dem Zylinder einbeschriebenes Polyeder, dessen Oberfläche aus lauter ebenen Dreicken besteht. Jedes von diesen ist kongruent zum Dreick mit den Ecken

$$\begin{pmatrix} R\cos\frac{\pi}{n} \\ -R\sin\frac{\pi}{n} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R\cos\frac{\pi}{n} \\ R\sin\frac{\pi}{n} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \frac{h}{m} \end{pmatrix}$$

Dessen Grundlinie ist $2R\sin\frac{\pi}{n}$, und die Höhe ist $\sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2+\frac{h^2}{m^2}}$. Da durch die Teilpunkte 2mn Dreiecke entstehen, ist die Oberfläche des Polyeders

$$F_{m,n} = 2mn \cdot R \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{R^2 (1 - \cos \frac{\pi}{n})^2 + \frac{h^2}{m^2}}$$

Für jedes feste m ist zwar $\lim_{n\to\infty} F_{m,n} = 2\pi h$ (benutze $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Aber der Grenzwert für $m,n\to\infty$ existiert gar nicht, denn bei festem n geht $F_{m,n}\to\infty$ für $m\to\infty$. Man kann dem Zylinder Polyeder mit belieblig großer Oberfläche einbeschreiben, wenn man nur die Ringe genügend schmal macht!

Um nun doch zu erklären, was die Oberfläche eines parametrisierten Flächenstücks sein soll, gehen wir wie folgt vor: Sei R das Rechteck $u_0 \le u \le u_1$, $v_0 \le v \le v_1$ und Φ auf einer offenen Menge $\supset R$ stetig differenzierbar. Wir nehmen an, Φ sei regulär, das bedeutet, daß die Jacobimatrix

$$D\Phi = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

den Rang 2 hat. Für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in R$ ist

$$\Phi\begin{pmatrix} u\\v \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} u_0\\v_0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} u - u_0\\v - v_0 \end{pmatrix} + \text{Rest}$$

wobei A die Jacobimatrix von Φ an der Stelle $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ ist.

Das Rechteck R hat den Flächeninhalt $(u_1 - u_0)(v_1 - v_0)$. Die Bildpunkte der Ecken sind $\Phi\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$ sowie

$$\Phi\left(\begin{matrix} u_1\\v_0 \end{matrix}\right), = \Phi\left(\begin{matrix} u_0\\v_0 \end{matrix}\right) + A\left(\begin{matrix} u_1-u_0\\0 \end{matrix}\right) + R_1$$

$$\Phi\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} u_1 - u_0 \\ v_1 - v_0 \end{pmatrix} + R_2$$

und

$$\Phi\begin{pmatrix} u_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_0 \end{pmatrix} + R_3$$

Bis auf die Reste R_i sind das die Ecken eines Parallelogramms mit dem Flächeninhalt

$$|A \cdot \begin{pmatrix} u_1 - u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_0 \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \times (v_1 - v_0) \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_v \end{pmatrix}| = |(u_1 - u_0) \begin{pmatrix} x$$

$$\sqrt{(y_u z_v - y_v z_u)^2 + (z_u x_v - z_v x_u)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2} (u_0 - u_1)(v_0 - v_1)$$

Dabei ist die Funktion unter der Quadratwurzel an der Stelle $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ zu nehmen. Nun betrachten wir eine reguläre Parameterdarstellung Φ auf dem Rechteck $a \leq u \leq b, \ c \leq v \leq d$. Wir unterteilen das Rechteck durch Teilpunkte

$$a = u_0 < u_1 < \dots < u_m = b, \ c = v_0 < v_1 < \dots < v_n = d$$

und erhalten dadurch eine Teilung der Fläche $\phi(R)$ in Teilstücke, deren jedes im oben beschriebenen Sinne nahe an einem Parallelogramm liegt. Die Summe der Flächeninhalte dieser Parallelogramme ist

(1)
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \Delta(u_{i-1}, v_{j-1}) \cdot (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$$

mit

$$\Delta(u,v) := \sqrt{(y_u z_v - y_v z_u)^2 + (z_u x_v - z_v x_u)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2}$$

(Beachte, daß der Radikand stets positiv ist, und selbstverständlich ist auch die positive Quadratwurzel gemeint.) Nach Voraussetzung ist Δ eine stetige Funktion von u,v. Sie ist also über das Rechteck R integrierbar. Die Summe (1) liegt zwischen der Obersumme und der Untersumme zur oben benutzten Teilung. Es folgt, daß die Summen (1) bei Verfeinerung der Teilung einem Grenzwert zustreben, nämlich dem Integral der Funktion Δ über das Rechteck R. Dasselbe gilt für beliebige offene (J-meßbare) Teilmengen U des Parameterbereichs.

Definition: Sei U, Φ ein parametrisiertes Flächenstück. Unter dem Flächeninhalt von $\Phi(U)$ versteht man den Wert des Integrals

$$\int_{U} \Delta(u, v) \ d(u, v)$$

Der Ausdruck

$$dO := \Delta(u, v) \ d(u, v)$$

heißt das Oberflächenelement.

Diese Definition ist noch mit einer Hypothek behaftet: Bei einer Beschreibung mit anderen Parametern sollte derselbe Flächeninhalt herauskommen. Wir präzisieren zuerst, was "andere Parameter" bedeutet:

Definition: Sei U, Φ ein parametrisiertes Flächenstück. Eine Abbildung $h:U\to W\subset\mathbb{R}^2$ heißt Parameterwechsel, wenn U durch h bijektiv auf W abgebildet wird und sowohl h als auch h^{-1} stetig differenzierbarist.

Wir berechnen die Funktion Δ für die Parameterdarstellungen Φ und $\Phi \circ h^{-1}$. Zur Vereinfachung der Schreibarbeit numerieren wir die Koordinaten:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in U, \ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in W = h U, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Nach der Kettenregel ist

$$\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial w_j}$$

Mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial w_1} & \frac{\partial x_i}{\partial w_2} \\ \frac{\partial x_j}{\partial w_1} & \frac{\partial x_j}{\partial w_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} & \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_j}{\partial u_1} & \frac{\partial x_j}{\partial u_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial w_1} & \frac{\partial u_1}{\partial w_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial w_1} & \frac{\partial u_2}{\partial w_2} \end{vmatrix}$$

Daraus folgt

$$\Delta^W(w) = \Delta^U(u) \cdot |\det Dh^{-1}(w)|$$

Die gewünschte Unabhängigkeit von der Parameterwahl, nämlich die Gleichung

$$\int_{U} \Delta^{U}(u) du = \int_{W} \Delta^{W}(w) \ dw$$

ist nun genau die Transformationsformel für Integrale aus Kap 15.

Beispiele:

1. Der Zylinder $x^2 + y^2 = R^2$ kann beschrieben weuden durch die Parameterdarstellung

$$x = R\cos u, \ y = R\sin u, \ z = v$$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} -R\sin u & 0\\ R\cos u & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dO = \sqrt{(R\cos u)^2 + (R\sin u)^2 + 0^2} = R$$

Die Oberfläche des Mantelteils mit $0 \le z \le h$ beträgt

$$\int_{0 \le u \le 2\pi, \ 0 \le v \le h} R \ du \ dv = 2\pi R h$$

und das ist auch was wir erwarten (rolle den Zylinder ab und erhalte das Rechteck mit den Seiten h und $2R\pi$.)

2. Die Oberfläche der Kugel mit Radius R wird beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$x = R\cos u\cos v, \ y = R\sin u\cos v, \ z = R\sin v$$

$$D\Phi = \begin{pmatrix} -R\sin u\cos v & -R\cos u\sin v \\ R\cos u\cos v & -R\sin u\sin v \\ 0 & R\cos v \end{pmatrix}$$

$$dO = \sqrt{(R^2 \cos u \cos^2 v)^2 + (R^2 \sin u \cos^2 v)^2 + (R^2 \cos v \sin v)^2} = R \cos v \, du \, dv$$

Die Polkappe nördlich der geographischen Breite ϕ ist gegeben durch

$$\phi \le v \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le u < 2\pi$$

Die Oberfläche dieser Kappe ist

$$\int_{\phi \le v \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le u < 2\pi} R \cos v \ du \ dv = 2R\pi \Big|_{\phi}^{\frac{\pi}{2}} \sin v = 2R\pi (1 - \sin \phi) = 2R\pi h$$

wobei h die Höhe der Kappe ist. Für h=R erhält man für die Oberfläche der Halbkugel den Wert $2R^2\pi$.

3. Das Flächenstück, welches durch den Zylinder $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ aus der Oberfläche der Einheitskugel ausgebohrt wird, heißt das Vivianische Fenster. Es ist beschrieben durch

$$x = \cos u \cos v, \ y = \sin u \cos v \ z = \sin v$$

wobei zu den Einschränkungen $0 \le u < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$ noch die Bedingung

$$\cos^2 v \le \cos u \cos v$$
, also $0 \le \cos v \le \cos u$

hinzukommt. Die Fläche des Fensters ist viermal so groß wie der in y, z > 0 gelegene Teil davon. Dieser hat den Flächeninhalt

$$\int_{0 \le u \le v \le \frac{\pi}{2}} \cos v \, du \, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin u) \, du = \frac{\pi}{2} - 1$$

Die Gesamtfläche des Fensters beträgt

$$4 \cdot (\frac{\pi}{2} - 1) = 2\pi - 4$$

Kuriosum: Die Oberfläche der Halbkugel ist 2π (siehe oben). Das bedeutet, daß der Teil der Kugeloberfläche, der vom Fenster übrig gelassen wird, die Oberfläche 4 besitzt, und das ist rational!! (Viviani 1692)

4. Drehflächen: Sei $\binom{x}{z} = \binom{\phi(u)}{\psi(u)}$, $a \le u \le b$ eine ganz in der Halbebene x > 0 gelegene Kurve. Dreht man sie um die z-Achse, so entsteht das Flächenstück

$$\left\{ \begin{pmatrix} \phi(u)\cos v \\ \phi(u)\sin v \\ \psi(u) \end{pmatrix}, \ a \le u \le b, \ 0 \le v \le 2\pi \right\}$$

Die Jacobimatrix für diese Parameterdarstellung ist

$$\begin{pmatrix} \phi' \cos v & -\phi \sin v \\ \phi' \sin v & \phi \cos v \\ \psi' & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Berechnung der Unterdeterminanten findet man

$$dO = \sqrt{(\phi'\phi)^2 + (\psi'\phi)^2} \, du \, dv = \phi \sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2} \, du \, dv$$

(beachte $\phi > 0$). Der Inhalt der Drehfläche ist

$$\int_{0 \le v \le 2\pi, a \le u \le b} dO = 2\pi \int_a^b \phi(u) \sqrt{(\phi'(u)^2 + \psi'(u)^2} du$$

Den Ausdruck $\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}$ erkennen wir wieder als Bogenelement ds der Kurve. Das letzte Integral ist per definitionem die x-Koordinate des Schwerpunkts mal der Länge der Kurve. Mit dieser Interpretation haben wir die

Zweite **Guldinsche Regel**: Der Flächeninhalt einer Drehfläche ist gleich der Länge der gedrehten Kurve, multpliziert mit dem Weg, den ihr Schwerpunkt bei der Drehung zurücklegt.

Beispiel: Durch Drehung der Kreislinie $(x - R)^2 + z^2 = a^2$ (wobei 0 < a < R) um die z-Achse entsteht ein Torus.

Der Schwerpunkt der Kreislinie ist $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, sein Weg bei der Drehung beträgt $2R\pi$. Nach Guldin ist die Oberfläche das Torus $2a\pi\cdot 2R\pi = 4\pi^2aR$

19. k-dimensionale Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n

In der Linearen Algebra haben wir gelernt, daß man einen k-dimensionalen Untervektorraum im \mathbb{R}^n entweder mit k Parametern beschreiben kann (nämlich als Menge aller Linearkombinationen $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$ von k linear unabhängigen Vektoren v_1, \ldots, v_k) oder als gemeinsames Nullstellengebilde von n-k unabhängigen Linearformen auf dem \mathbb{R}^n . Ähnlich kann man eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n (lokal) durch k "unabhängige" Parameter beschreiben oder (lokal) als Nullstellengebilde von n-k "unabhängigen" Funktionen. Nur ist das jetzt natürlich ein ganzes Stück komplizierter als in der Linearen Algebra; das Mittel, um von der einen zur anderen Beschreibung zu kommen, ist der Satz über implizite Funktionen. Bevor wir "Mannigfaltigkeit" auf die eine oder andere Weise definieren, beweisen wir

Satz 43. Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden drei Aussagen gleichwertig:

1. Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Teilmenge $U \ni p$ im \mathbb{R}^n eine offene Teilmenge $W \ni 0$ im \mathbb{R}^k eine injektive stetig differenzierbare Abbildung $f: W \to U$ mit f(0) = p, $f(W) = U \cap M$ und Rang Df(x) = k für alle $x \in W$

2. Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Menge $U \ni p$ im \mathbb{R}^n und eine stetig differenzierbare Abbildung $F: U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit

$$U \cap M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$$
 und Rang $DF(x) = n - k$ für alle $x \in U$

3. Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Menge $U \ni p$ im \mathbb{R}^n eine offene Menge $V \ni 0$ im \mathbb{R}^n eine bijektive Abbildung $h: U \to V$, so daß h und h^{-1} stetig differenzierbar sind und

$$h(p) = 0, \ h(U \cap M) = \{x \in V \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$$

(Eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung h mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung nennt man einen Diffeomorphismus.)

Beweis: $1 \Rightarrow 3$:

Nach Voraussetzung hat Df(0) den Rang k. Wir nehmen an, die Koordinaten seien so numeriert, daß die Teilmatrix aus den ersten k Spalten von Df(0) invertierbar ist. Für $x \in W$ und $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ setze

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + \left(\frac{0}{y}\right)$$

Dann ist

$$Dg = \begin{pmatrix} 0 \\ Df \\ \mathbf{1}_{n-k} \end{pmatrix},$$

und Dg(0) ist invertierbar. Nach dem Umkehrsatz (Kap 9) gibt es offene Mengen $U_0 \ni p$ im \mathbb{R}^n , $U_0 \subset U$ und $V \ni 0$, $V \subset W \times \mathbb{R}^{n-k}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $h: U_0 \to V$ mit

$$h(g(x)) = x$$
 für alle $x \in V$ und $g(h(x)) = x$ für alle $x \in U_0$

Wegen $U_0 \subset U$ gibt es für alle $x \in U_0 \cap M$ ein $w \in W$ mit x = f(w), und

$$h(x) = h(f(w)) = h(g\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ also } h_{k+1}(x) = \dots = h_n(x) = 0$$

Ist umgekehrt $x \in V$ und $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$, so ist $x = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $w \in W$ und

$$x = h(g(x)) = h(f(w)) \in h(U \cap M) \cap V = h(U_0 \cap M)$$

 $3 \Rightarrow 2$: $F(x) := \begin{pmatrix} h_{k+1}(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{pmatrix}$ ist eine stetig differenzierbare Abbildung von U in den \mathbb{R}^{n-k} . Nach 3. gilt

$$U \cap M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$$

Nach Voraussetzung hat Dh den Rang n, das heißt, die Zeilen von Dh sind linear unabhängig. Erst recht sind die letzten n-k Zeilen von Dh linear unabhängig. Diese bilden aber gerade die Matrix DF. Diese besitzt also den Rang n-k.

 $2 \Rightarrow 1$: Nach Voraussetzung hat DF den Rang n-k. Wir numerieren die Koordinaten so, daß die aus den letzten n-k Spalten gebildete Teilmatrix von DF(p) invertierbar ist. Nach dem Satz über implizite

Funktionen gibt es offenes $W \ni \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^k und offenes $V \ni \begin{pmatrix} p_{k+1} \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^{n-k} und eine stetig differenzierbare Abbildung $\phi: W \to V$ mit

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x)$$
 für alle $x \in W, y \in V$

 $W \times V =: U$ ist offen $\ni p$ im \mathbb{R}^n . Für $x \in W$ setze $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}$. Dann ist f eine stetig differenzierbare Abbildung von W nach U, und

$$f(W) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix} \mid x \in W \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \mid F(x, y) = 0 \right\} = U \cap M$$

Zudem hat

$$Df = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_k \\ D\phi \end{pmatrix}$$

den Rang k. Das beendet den Beweis.

Definition: Eine Teilmenge M des \mathbb{R}^n , welche eine und damit alle der drei Eigenschaften 1,2,3 besitzt, heißt eine k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n .

Der Diffeomorphismus h in der Fassung 3 der Definition von Mannigfaltigkeit wird in dem Buch von K.Jänich: Mathematik 2, geschrieben für Physiker, sehr schön anschaulich ein Flachmacher genannt.

Beispiel: Die Oberfläche S der Einheitskugel im \mathbb{R}^3

1. Beschreibung durch Parameter: Die Punkte werden gegeben durch ihre geographische Länge und Breite. Sei W das offene Rechteck in der $\phi - \theta$ -Ebene, welches durch $0 < \phi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ beschrieben wird.

$$f(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

bildet W in die offene Menge U des \mathbb{R}^3 ab, die dadurch entsteht, daß man die Halbebene $y=0, x\geq 0$ aus dem \mathbb{R}^3 entfernt, und zwar ist genau

$$f(W) = U \cap S$$

Die Jacobimatrix $Df = \begin{pmatrix} -\sin\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ hat an jeder Stelle von W den Rang 2.

Verschiebt man das Rechteck W in der $\phi - \theta$ -Ebene, so erhält man andere Teile der Kugeloberfläche und kann so die ganze Kugeloberfläche bedecken.

2. Beschreibung durch eine Gleichung: Hier genügt $U=\mathbb{R}^3$. Es ist $S=\{x\in\mathbb{R}^3\mid F(x):=x^tx-1=0\}$, und $DF=(2x_1-2x_2-2x_3)$ hat für alle $x\in S$ den Rang 1.

3. Setze
$$h(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\end{pmatrix}$$
. Offenbar ist $x\in S\Leftrightarrow h_3(x)=0$, und

$$Dh = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

h bildet den Halbraum $U:=\{x\in\mathbb{R}^3\mid x_3>0\}$ bijektiv ab auf $V:=\{y\in\mathbb{R}^3\mid y_1^2+y_2^2-1< y_3\}$ (Inneres eines Paraboloids), und $h(U\cap S)=\{y\in V\mid y_3=0\}$, und Dh ist auf U überall invertierbar. Wieder muß man S durch mehrere solche Stücke überdecken.

Tangentialraum:

Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n .

Definition: Der Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentenvektor an M in $p \in M$, wenn es eine stetig differenzierbare Kurve $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \to M$ gibt mit

$$\alpha(0) = p \text{ und } \dot{\alpha}(0) = v$$

Angenommen, dies sei der Fall. Dann beschreibt man M in der Nähe von p durch eine Gleichung F(x) = 0. Da die Kurve ganz auf M liegt, ist $F(\alpha(t)) = 0$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Mit Benutzung der Kettenregel folgt daraus

$$DF(\alpha(t)) \dot{\alpha}(t) = 0$$
, insbesondere $DF(p) v = 0$

Facit: Alle Tangentenvektoren an M in p werden von DF(p) annulliert.

Beschreibt man M in der Nähe von p durch eine Parameterdarstellung $f: W \to M \subset \mathbb{R}^n$ mit f(0) = p, so kann man für jedes feste n-Tupel $\lambda_1,...,\lambda_k$ die Kurve

$$\alpha(t) := f(\lambda_1 t,, \lambda_k t)$$

betrachten. Es ist $\alpha(0) = p$ und $\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \partial_i f$, wobei $\partial_i f$ der Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$,

Facit: Alle Linearkombinationen der Vektoren $\partial_1 f(0), \dots, \partial_k f(0)$ sind Tangentenvektoren.

Sei $T_p(M)$ die Menge aller Tangentenvektoren an M in p. Wir sahen

$$\langle \partial_1 f,, \partial_k f \rangle \subset T_p(M) \subset \text{Kern } DF(p)$$

Der linke und der rechte Term sind Vektorräume, und zwar haben sie beide nach Definition 1 und 2 von Mannigfaltigkeit die Dimension k. Also sind sie gleich. Das beweist gleichzeitig:

 $T_p(M)$ ist ein Vektorraum und hat die Dimension k.

- 1. Beispiel: Sei M der Zylinder $x^2+y^2=1$ im \mathbb{R}^3 . Er wird parametrisiert durch $x=\cos\phi,\ y=\sin\phi,\ z=1$

1. Beispiel. Set
$$M$$
 der Zymider $x + y = 1$ im \mathbb{R} . Et wird parametrisiert durch $x = \cos \phi$, $y = \sin \phi$, $z = z$. Der Tangentialraum im Punkte $p = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_0 \\ \sin \phi_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ wird aufgespannt durch die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} x_\phi \\ y_\phi \\ z_\phi \end{pmatrix} (\phi_0, z_0) = \begin{pmatrix} -\sin \phi_0 \\ \cos \phi_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \\ z_z \end{pmatrix} (\phi_0, z_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Anderseits besteht er aus den

Vektoren
$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
 mit $DF(p)v = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2(x_0x + y_0y) = 0$, das sind offenbar dieselben.

2. Beispiel: Wir betrachten im Ring $M_n(\mathbb{R})$ aller n-reihigen reellen Matrizen (den wir als n^2 -dimensionalen reellen Vektorraum ansehen)

$$M = O(n, \mathbb{R}) = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) \mid F(X) = X^t X - \mathbf{1} = 0 \}$$

M ist also gegeben durch ein System von $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen. Die Jacobimatrix, wenn man alle Komponenten hinschreibt, ist also eine Matrix mit $\frac{n(n+1)}{2}$ Zeilen und n^2 Spalten, die man sich lieber nicht (nach Anordnung der Komponenten) hingeschrieben vorstellen möchte. Um das zu vermeiden, gehen wir auf die Definition der Differenzierbarkeit (Kap 7) zurück und suchen die lineare Abbildung L vom \mathbb{R}^{n^2} (= $M_n(\mathbb{R})$) in den $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (= Vektorraum der symmetrischen Matrizen) mit

$$F(X) - F(A) = L(X - A) + \text{Rest}$$

Es ist

$$X^{t}X - A^{t}A = A^{t}(X - A) + (X - A)^{t}A + (X - A)^{t}(X - A)$$

Da der letzte Term mit $X \to A$ quadratisch gegen 0 geht, kann man die gesuchte lineare Abbildung L ablesen: sie bildet die Matrix H ab auf $A^tH + H^tA$ (dies ist offensichtlich linear in H). Das Bild dieser Abbildung besteht aus allen symmetrischen Matrizen; denn um die symmetrische Matrix S zu erhalten, kann man zum Beispiel $H = \frac{1}{2}(A^t)^{-1}S$ setzen. Für alle $A \in M$ ist also der Rang von DF(A) gleich $\frac{n(n+1)}{n}$.

Folgerung: $O(n,\mathbb{R})$ ist eine $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{n^2} .

Jetzt bestimmen wir noch den Tangentialraum im Punkte 1: Wie wir sahen, ist er der Kern von DF(1), und dieser besteht aus allen schiefsymmetrischen Matrizen:

$$T_1(O(n,\mathbb{R})) = \{ H \in M_n(\mathbb{R}) \mid H + H^t = 0 \}$$

Hier können wir schon etwas beobachten, was wir später etwas systematischer studieren wollen: Ist H schiefsymmterisch, so ist e^H orthogonal; denn wenn $H^t = -H$, dann ist natürlich H mit H^t vertauschbar und daher (Kap 12)

$$1 = e^{H+H^t} = e^H \cdot e^{H^t} = e^H \cdot (e^H)^t$$

Die Exponentialfunktion bildet also den Tangentialraum am Einselement in die Gruppe $O(n,\mathbb{R})$ ab. Wegen

$$e^X - e^0 = e^X - \mathbf{1} = X + X^2 \cdot (\text{konvergente Reihe in } X)$$

ist die Jacobimatrix an der Stelle X=0 gleich 1. Aus dem Umkehrsatz (Kap 9) folgt:

Die Exponentialfunktion bildet eine Nullumgebung im Tangentialraum bijektiv auf eine Einsumgebung in der Gruppe $O(n,\mathbb{R})$ ab. Beispiel: n=2. Das Bild der Exponentialabbildung ist in diesem Falle die Drehgruppe (Untergruppe mit Determinante 1):

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}}$$

Eine Parameterdarstellung für die $O(n,\mathbb{R})$ wurde von Cayley angegeben:

1. Für jede schiefsymmetrische Matrix X ist X-1 invertierbar; denn

$$(X - \mathbf{1})v = 0 \Rightarrow Xv = v \Rightarrow (v, v) = (Xv, v) = (v, X^t v) = -(v, Xv) = -(v, v) \Rightarrow (v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

Genauso ist X + 1 invertierbar. Daher existiert $(1 - X)^{-1}(1 + X) =: f(X)$.

2. f(X) ist orthogonal; denn $f(X)^t = (\mathbf{1} + X^t)(\mathbf{1} - X^t)^{-1} = (\mathbf{1} - X)(\mathbf{1} + X)^{-1}$, und die Faktoren sind vertauschbar.

3.

$$f(X) - f(A) = (\mathbf{1} - X)^{-1} \{ (\mathbf{1} + X)(\mathbf{1} - A) - (\mathbf{1} - X)(\mathbf{1} + A) \} (\mathbf{1} - A)^{-1} = (\mathbf{1} - X)^{-1} \cdot 2(X - A)(\mathbf{1} - A)^{-1} = 2(\mathbf{1} - A)^{-1}(X - A)(\mathbf{1} - A)^{-1} + \text{ h\"ohere in } X - A$$

Die lineare Abbildung L ist also gegeben durch

$$L(H) = 2(\mathbf{1} - A)^{-1} H (\mathbf{1} - A)^{-1}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv. Damit ist die Definition 1. von "Mannigfaltigkeit" manifest. Man kann sogar angeben, welche orthogonalen Matrizen von dieser Parameterdarstellung getroffen werden: wenn $A + \mathbf{1}$ invertierbar ist, dann kann man $X = (A - \mathbf{1})(A + \mathbf{1})^{-1}$ setzen und nachrechnen, daß X schiefsymmetrisch und f(X) = A ist.

Verhalten bei Abbildungen: Sei M eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^m und N eine l-dimensionale Mannifaltigkeit im \mathbb{R}^n . Eine Abbildung $f: M \to N$ heißt differenzierbar, wenn es zu $p \in M$ offenes $U \ni p$ im \mathbb{R}^m (obiges m!) gibt und eine auf U definierte stetig differenzierbare Abbildung in den \mathbb{R}^n so daß

$$F(x) = f(x)$$
 für alle $x \in U \cap M$

m.a.W. wenn man f (lokal) auf eine volle Umgebung im \mathbb{R}^m fortsetzen kann. Natürlich ist F durch f i.a. nicht eindeutig bestimmt.

Liegt diese Situation vor, so induziert f eine Abbildung des Tangentialraums an M in p in den Tangentialraum an N in q = f(p); nämlich: Ist $v \in T_p(M)$, so gibt es eine Kurve α mit $\alpha(0) = p$ und $\dot{\alpha}(0) = v$.

 $\beta := F \circ \alpha$ ist eine differenzierbare Kurve, die ganz in N verläuft, mit $\beta(0) = q$.

Behauptung: $\dot{\beta}(0)$ hängt nicht von der gewählten Fortsetzung F ab:

Beweis: Ist G eine andere Fortsetzung, so ist, weil F = G auf M und weil α ganz in M verläuft, $h(t) := F(\alpha(t)) - G(\alpha(t)) = 0$ für alle t. Dann ist $\dot{h}(t) = 0$, und das ist die Behauptung. Nach der Kettenregel ist $\dot{\beta}(t) = DF(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)$, also $\dot{\beta}(0) = DF(p)\dot{\alpha}(0)$.

Definition: Die durch $v \mapsto DF(p)v$ definierte Abbildung von $T_p(M)$ nach $T_q(N)$ heißt das Differential von f im Punkte p und wird mit df_p bezeichnet:

$$df_p(v) = DF(p) v$$

Wir betrachten den Spezialfall, daß $N=\mathbb{R}$ und M eine offene Teilmenge im \mathbb{R}^n ist. Dann brauchen wir f gar nicht mehr fortzusetzen: f=F. Der Tangentialraum $T_p(M)$ ist isomorph zum \mathbb{R}^n , und df_p ist eine Linearform auf $T_p(M)$. Die Jacobimatrix Df von f ist die Zeile $(\partial_1 f,, \partial_n f)$, und für $v \in T_p(M)$ ist

(1)
$$df_p(v) = (\partial_1 f(p), \dots, \partial_n f(p)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \partial_i f(p) v_i$$

Speziell für $f(x) = x_i$ ist $Dx_i = (0, ..., 1, ...0)$ und $dx_{i,p}(v) = v_i$. Aus (1) folgt

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(p) dx_{i,p}(v)$$
 für alle v , also $df_p = \sum_{i=1}^n \partial_i f(p) dx_{i,p}$

Dies ist, wie oben definiert, das Differential von f im Punkte p. Ohne Bezug auf eine Funktion f ist Definition: Eine Linearform auf $T_p(M)$ heißt ein Differential im Punkte p.

Jedes Differential ω_p im Punkte p hat die Gestalt

$$\omega_p(v) = \sum_i \lambda_i v_i = \sum_i \lambda_i dx_{i,p}(v)$$

also

(2)
$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i dx_{i,p}$$

mit gewissen Zahlen λ_i .

Nun lösen wir uns von der Stelle p: Sei U eine offene Teilmenge im \mathbb{R}^n .

Definition: Eine Differentialform ω auf U ist eine Abbildung, die jedem Punkt $p \in U$ ein Differential ω_p im Punkte p zuordnet.

Nach (2) kann man also schreiben

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} u_i \ dx_i$$

wobei die u_i reellwertige Funktionen auf U sind. ω heißt stetig differenzierbar (unendlich oft differenzierbar), wenn die u_i es sind.

Eine wichtige Frage ist: Welche Differentialformen $\omega = \sum u_i dx_i$ sind ein df? Das bedeutet: Zu welchen $u_1,...,u_n$ gibt es eine Funktion f mit $u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$? Oder, in Anlehnung an Kap 7: Welche Vektorfelder sind Gradientenfelder? Nach Satz 17 und seinen Folgerungen ist dazu notwendig, daß die Integrabilitätsbedingungen

(I)
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j$$

erfüllt sind. Ob diese Bedingungen auch hinreichend sind, hängt nicht nur von den u_i , sondern auch von dem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ ab.

Beispiel: Sei n=2 und $u(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$ und $v(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. Diese Funktion ist außer im Nullpunkt überall definiert. Man rechnet aus, daß

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Gäbe es eine Funktion f mit grad $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, so wäre für die Funktion $h(t) := f(\cos t, \sin t)$ nach der Kettenregel

$$h'(t) = u(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t) + v(\cos t, \sin t) \cdot \cos t = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Man hätte

$$0 = f(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - f(\cos 0, \sin 0) = h(2\pi) - h(0) = \int_0^{2\pi} h'(t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Also kann es eine solche Funktion f nicht geben, obwohl die Integrabilitätsbedingung aus Kap 7 erfüllt ist. Der Grund ist, daß der Weg $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$ die Stelle umläuft, an der die Funktionen u und v nicht definiert sind. Wir wollen beweisen, daß die Antwort JA ist, wenn das Gebiet von einer ganz speziellen Natur ist, welche ein Gegenbeispiel wie eben ausschließt:

Definition: Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein Sterngebiet, wenn es in U einen Punkt s gibt (genannt Sternmittelpunkt) derart, daß für jeden anderen Punkt $p \in U$ die Verbindungsstrecke von s nach p ganz in U liegt.

Zum Beispiel ist jede konvexe Menge (etwa eine Kugel) ein Sterngebiet, hier ist sogar jeder Punkt Sternmittelpunkt.

Satz 44. In einem Sterngebiet ist jedes Vektorfeld, welches die Integrabilitätsbedingungen (I) erfüllt, ein Gradientenfeld.

Beweis: Ohne Einschränkung (notfalls verschieben) sei der Nullpunkt Sternmittelpunkt für U. Seien $u_1,...,u_n$ mit (I) gegeben. Für $x\in U$ setzt man

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n u_i(tx) \, x_i \, dt$$

Wir benutzen, daß wir die partiellen Ableitungen unter dem Integral ausrechnen dürfen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(tx) t x_i + u_i(tx) \delta_{ij} \right\} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(tx) t x_i + u_i(tx) \delta_{ij} \right\} dt$$

$$= \int_0^1 \left\{ t \frac{d}{dt} u_j(tx) + u_j(tx) \right\} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left\{ t u_j(tx) \right\} dt = |_0^1 t u_j(tx) = u_j(x)$$

Also ist in der Tat $df = \sum_{i=1}^{n} u_i dx_i$.

Dies ist ein Spezialfall des Lemmas von Poincare, welches wir im nächsten Semester beweisen werden. Dazu muß über dem Vektorraum der Differentiale im Punkte p die Graßmannalgebra gebaut werden.