Prof. Dr. S. Böge
Th. Krämer

Sommersemester 2009
Abgabe: Freitag, 29. Mai 2009, bis 11:14h im HS 2

Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 26. Die Funktion

$$f(x) \;:=\; \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar (man prüfe das nach, insbesondere bei $x = 0$), und $f'(0) = 1$. Man beweise, dass f trotzdem in keinem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ injektiv ist. Welche Voraussetzung, die ganz am Anfang des Beweises des Umkehrsatzes benutzt wurde, ist hier nicht erfüllt?

Aufgabe 27. Man finde das Maximum der Funktion

$$F(x) \;:=\; \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{auf der Menge} \quad S \;:=\; \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \text{alle } x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Big\}.$$

Man leite aus dem Ergebnis die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel her:

$$(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \;\leq\; \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{für alle} \quad x_1, \ldots, x_n > 0.$$

Aufgabe 28. (a) Sei $S = S^t$ eine reelle symmetrische Matrix mit $x^t S x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei $u \in \mathbb{R}^n$ und $u^t S u = 0$. Zeige, dass dann $Su = 0$ ist.

(b) Sei $A = A^t$ eine reelle symmetrische Matrix. Man wende die Aussage (a) an auf die Matrix $S := \lambda \mathbf{1} - A$ und zeige, dass das Maximum von $x^t A x$ auf der Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x = 1\}$ ein Eigenwert von A ist. Diese Aussage kann man also auch ohne Benutzung von Lagrange-Multiplikatoren beweisen.

Aufgabe 29. In der Vorlesung hatten wir gesehen, daß zwei Matrizen A und B, welche denselben Endomorphismus eines Vektorraumes V bezüglich zweier verschiedener Basen beschreiben, dasselbe charakterische Polynom besitzen (weil sie durch eine Transformation der Form $B = T^{-1}AT$ auseinander hervorgehen). Sei jetzt

$$A \;:=\; \mathbf{1} + ab^t \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $a \neq 0$ und $b \neq 0$ sei (sonst ist die Aufgabe trivial). Man wähle eine Basis des $\mathbb{R}^n$ so geschickt, daß man an der Wirkung von A auf diese neue Basis das charakteristische Polynom von A ganz leicht ablesen kann (Begründung?). Wie lautet es?

Aufgabe 30. Die Matrix

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{erfüllt offenbar} \qquad A^3 = \mathbf{1},$$

ist also Nullstelle des Polynoms $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$. Man finde Polynome $u(X)$ und $v(X)$ mit

$$u(X) \cdot g(X) + v(X) \cdot h(X) = 1 \quad \text{für} \quad g(X) := X - 1, \quad h(X) := X^2 + X + 1,$$

berechne $P := u(A) \cdot g(A)$ und $Q := v(A) \cdot h(A)$ und zeige $P + Q = \mathbf{1}$ und $PQ = QP = 0$.

Die Übungsblätter und organisatorische Informationen zur *Mathematik für Physiker* gibt es auch auf der Internetseite zur Vorlesung:

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/MathPhysSoSe09/`