Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 26. Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^{m\times n}$ aller reellen $(m \times n)$-Matrizen als einen normierten Raum mit der Operatornorm

$$||A|| \;:=\; \sup_{x\in\mathscr{B}} |Ax|,$$

wobei $\mathscr{B} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ sei und $|\cdot|$ die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ bzw. im $\mathbb{R}^m$ bezeichne. Man beweise die Abschätzung

$$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$$

und folgere, dass die reellwertige Funktion $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto ||A||$ stetig ist!

Aufgabe 27. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) \;:=\; \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

(a) Man berechne die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ ausserhalb von $(0, 0)$ nach den Regeln für die Differentiation von Funktionen einer reellen Variablen!

(b) Man berechne die partiellen Ableitungen im Nullpunkt, indem man tatsächlich auf die Definition als Grenzwert der Differenzenquotienten zurückgeht!

(c) Man zeige, dass $\partial_x\partial_y f(0, 0) = 1$, aber $\partial_y\partial_x f(0, 0) = -1$ ist!

Aufgabe 28. Seien $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := x^2 + y^4, \quad g(x, y) := x^2 \quad \text{und} \quad h(x, y) := x^2 + y^3.$$

Man zeige: Alle drei Funktionen haben im Nullpunkt dieselbe Hessematrix, aber f hat im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum, g hat dort ein nicht-isoliertes lokales Minimum, und h hat im Nullpunkt kein lokales Extremum! *Lehre: An der Hessematrix kann man nichts ablesen, wenn sie nicht invertierbar ist.*

Aufgabe 29. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) \;:=\; (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Für festes $(a, b) \neq (0, 0)$ betrachte man die Funktion $g_{a,b}(\lambda) := f(\lambda a, \lambda b)$, d.h. die Einschränkung von f auf die Gerade durch $(0, 0)^t$ und $(a, b)^t$. Man zeige: Für alle Wahlen der Richtung $(a, b) \neq (0, 0)$ hat die Funktion $g_{a,b}(\lambda)$ bei $\lambda = 0$ ein isoliertes lokales Minimum, aber f selbst hat im Nullpunkt kein lokales Extremum!

Aufgabe 30. Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| < 1$ sei

$$f(x) \;:=\; \frac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}}.$$

Man zeige, dass f die offene Kugel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ bijektiv auf den $\mathbb{R}^n$ abbildet, und berechne die Jacobimatrix von f!

Die Übungsblätter und organisatorische Informationen zur *Mathematik für Physiker* gibt es auch auf der Internetseite zur Vorlesung:

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/MathPhysSoSe09/`