Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 16. Welche der drei Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sind positiv definit? Genauer bestimme man jeweils den Sylvester-Typ (p, q)!

Aufgabe 17. Man zeige, daß die Matrix

$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

othogonal ist und die Determinante 1 hat. Sie stellt also eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ dar. Man bestimme die zugehörige Drehachse und den Drehwinkel!

Aufgabe 18. Man zeige: Für je zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ und jede Drehmatrix T ist

$$T(x \times y) = Tx \times Ty.$$

Man folgere daraus: Wenn die Matrix A die Drehung im $\mathbb{R}^3$ um die Achse $< a >$ um den Winkel α beschreibt und wenn T eine beliebige Drehmatrix ist, dann beschreibt die Matrix TAT^{-1} die Drehung um die Achse $< Ta >$ um den Winkel α.

Aufgabe 19. Man wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die drei Polynome

$$v_0(x) := 1, \quad v_1(x) := x \quad \text{und} \quad v_2(x) := x^2$$

bezüglich des Skalarprodukts

$$(u, v) := \int_0^\infty e^{-x} u(x) v(x)\, dx$$

an! (Das Ergebnis sind die ersten drei der sogenannten "Laguerre-Polynome").

Aufgabe 20. In der Vorlesung ist gezeigt worden, dass jede invertierbare Matrix A ein Produkt

$$A = KB$$

aus einer orthogonalen Matrix K und einer (oberen) Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalgliedern ist. Man zeige, daß diese Zerlegung eindeutig ist: Sind K_1, K_2 orthogonale Matrizen und B_1, B_2 obere Dreiecksmatrizen mit

$$K_1 B_1 = K_2 B_2,$$

dann muss bereits $K_1 = K_2$ und $B_1 = B_2$ sein.

Die bisherigen Übungsblätter und organisatorische Informationen zur *Mathematik für Physiker* gibt es auch auf der Internetseite zur Vorlesung:

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/MathPhysSoSe09/`