Prof. Dr. S. Böge Sommersemester 2009
Th. Krämer Abgabe: Freitag, 24. April 2009, bis 11:14h im HS 2

Für jede Aufgabe gibt es maximal 4 Punkte.

Aufgabe 6. Man wende das Gaußsche Verfahren an auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & b. \end{array}$$

Für welche b ist es lösbar? Für diese b bestimme man jeweils alle Lösungen!

Aufgabe 7. Erzeugen die fünf Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{den} \quad \mathbb{R}^4?$$

Kann man einen Untervektorraum $U \neq \mathbb{R}^4$ finden, in dem diese Vektoren alle liegen? Wenn ja, beschreibe man U durch eine Gleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$, d.h. man gebe entsprechende Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ an!

Aufgabe 8. Sei V der von den beiden Funktionen $v_1(x) := \sin x$ und $v_2(x) := \cos x$ aufgespannte Vektorraum. Ferner sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest und T_α die Abbildung, die jeder Funktion $f \in V$ die Funktion

$$(T_\alpha f)(x) := f(x + \alpha) \qquad \text{zuordnet.}$$

(a) Man zeige, dass T_α eine lineare Abbildung von V *in sich (!)* ist.

(b) Bezüglich der Basis v_1, v_2 von V beschreibe man T_α durch eine Matrix, d.h. man finde die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

für die $T_\alpha(v_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2$ und $T_\alpha(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$ ist.

Aufgabe 9. Man mache sich ein Bild von der Abbildung

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Welche Vektoren bleiben fest? Was sind die Vektoren der Gestalt $x - Tx$? Ist T invertierbar? Wie sieht die Matrix A mit $T(x) = A \cdot x$ aus?

Allgemeiner seien jetzt zwei feste Vektoren $a, s \in \mathbb{R}^2$ mit $a^t s = 0$ gegeben. Wie sieht die Abbildung $x \mapsto x - x^t a \cdot s$ aus? Man finde die Matrix A mit $A \cdot x = x - x^t a \cdot s$!

Aufgabe 10. (a) Man finde zwei 2×2-Matrizen A und B mit $AB = 0 \neq BA$!

(b) Es seien U und W zwei Untervektorräume eines Vektorraumes V. Man zeige: Die Vereinigungsmenge $U \cup W$ ist genau dann ebenfalls ein Untervektorraum von V, wenn $U \subset W$ oder $W \subset U$ ist!

Die bisherigen Übungsblätter und organisatorische Informationen zur *Mathematik für Physiker* gibt es auch auf der neuen Internetseite zur Vorlesung:

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/MathPhysSoSe09/`