Prof. Dr. S. Böge
Th. Krämer

Sommersemester 2009
Abgabe: Freitag, 03. Juli 2009, bis 11:14h im HS 2

Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 55. Für feste $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ sei $E \subset \mathbb{R}^3$ das Ellipsoid

$$E: \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \;\leq\; 1.$$

Ferner sei v ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$ und g die Gerade, die von v aufgespannt wird:

$$g \;:=\; \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Man berechne das Trägheitsmoment von E bei Drehung um die Achse g.

Aufgabe 56. Die Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 \;=\; 4(x^2 - y^2)$$

heißt Lemniskate. Man mache sich ein grobes Bild vom Verlauf der Kurve und berechne den Flächeninhalt des von ihr umschlossenen Bereichs

$$(x^2 + y^2)^2 \;\leq\; 4(x^2 - y^2).$$

Aufgabe 57. Man beweise das Assoziativgesetz für die Faltung:

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Dabei soll wie in der Vorlesung vorausgesetzt werden, daß f, g, h kompakten Träger haben und integrierbar sind.

Aufgabe 58. Die Funktion g auf $\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{wenn} \quad\;\; |x| > 1. \end{cases}$$

Man berechne $g * g$ und $g * g * g$ und zeichne den Verlauf dieser Funktionen.

Aufgabe 59. Sei g die Funktion aus Aufgabe 58, und für $r > 0$ sei

$$g_r(x) \;:=\; \frac{1}{2r}\, g\left(\frac{x}{r}\right).$$

Man zeige: Für jede stetige Funktion f mit kompaktem Träger ist

$$\lim_{r \to 0} (f * g_r)(y) = f(y) \quad \text{gleichmäßig in } y,$$

d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein r_0 mit $|(f * g_r)(y) - f(y)| < \epsilon$ für alle y und alle $r > r_0$.

Die Übungsblätter und organisatorische Informationen zur *Mathematik für Physiker* gibt es auch auf der Internetseite zur Vorlesung:

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/MathPhysSoSe09/`