Prof. Dr. S. Böge
Th. Krämer

Sommersemester 2009
Abgabe: Freitag, 19. Juni 2009, bis 11:14h im HS 2

Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe 45. Sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Fortsetzung der durch

$$f_k(x) \;:=\; (\pi - x)^k \quad \text{für} \quad 0 \le x < 2\pi$$

definierten Funktion, und sei c_n^k der n-te Fourierkoeffizient von f_k. Man drücke die c_n^k durch die c_n^{k-1} aus und bestimme so sukzessive die Fourierreihen von $(\pi - x)^k$ für $k = 1, 2, 3, 4$. Für welche x gilt

$$(\pi - x)^k \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^k e^{inx} \;?$$

Man benutze diese Fourierentwicklungen, um $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ zu berechnen.

Aufgabe 46. Man berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ auf eine andere Weise mit dem Satz von Parseval.

Aufgabe 47. Sei R ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Man zeige: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es zueinander kongruente Quadrate $Q_1, ..., Q_k$, sodass

$$R \;\subset\; Q_1 \cup .... \cup Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{k} vol(Q_i) \;<\; vol(R) + \epsilon \quad \text{ist.}$$

Aufgabe 48. Für rationale Zahlen x bezeichne q_x den Nenner in der gekürzten Bruchdarstellung von x. Auf dem Quadrat $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x, y \le 1\}$ definiere man die Funktion

$$f(x, y) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \text{ und } y \text{ rational und } q_x = q_y \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige:

(a) Für jedes feste y existiert $\int_0^1 f(x, y)dx$ und ist $= 0$. Also ist auch das iterierte Integral

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, dx \right) dy \;=\; 0.$$

(b) In jeder offenen Teilmenge von K ist die Schwankung von f gleich 1; daher ist die Funktion f nicht über K integrierbar.

Aufgabe 49. Man berechne das Integral

$$\int_{0 \le x, y \le 1} \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}^3}\, d(x, y),$$

indem man (Fubini!) zuerst über x und dann über y integriert. Dann berechne man das iterierte Integral in der umgekehrten Reihenfolge. Man lerne daraus: Auch wenn in beiden Fällen dasselbe herauskommt, kann es sich lohnen, über die Reihenfolge nachzudenken.

Die Übungsblätter und organisatorische Informationen zur *Mathematik für Physiker* gibt es auch auf der Internetseite zur Vorlesung:

`http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~tkraemer/MathPhysSoSe09/`