Die Eulersche Reihe (Eine spezielle Fourierreihe)

Luis Felipe Müller

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis*
(Sommersemester 2009, Leitung Prof. Dr. Eberhard Freitag)

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Bevor ich mich dem eigentlichen Thema der Arbeit widme, werde ich eine kurze Biographie zu Leonhard Euler, der Mathematiker, der das Fundament für die Analysis, wie wir sie heute kennen, legte, geben.
Leonhard Euler, geboren als ältester Sohn des Pfarrers Paul Euler und Margarethe Bruckner am 15. April 1707 in Basel, studierte ab seinem dreizehnten Lebensjahr Mathematik an der Universität Basel und lernte dort Johannes Bernoulli kennen. Drei Jahre später, im Jahre 1723, erlangte er schließlich die Magisterwürde. Ab 1733 übernahm er die durch den Tod von Daniel Bernoulli freigewordene Stelle als Professor an der Universität Sant Petersburg. Hier lernte er Christian Goldbach kennen, mit dem er jahrzehntelang über Briefwechsel seine Ergebnisse verglich. Die Eulersche Reihe, so wie sie unter (2.1) aufgeführt ist, teilte Euler Christian Goldbach in seinem Brief vom 4. Juli 1744 mit, allerdings ohne Beweis. Über 10 Jahre später, im Jahre 1755 veröffentlichter Euler in seinem Werk *Institutiones calculi differentialis* einen Beweis.
1744 wurde Euler von Friedrch dem Großen an die Akademie der Wissenschaft nach Berlin berufen, wo er 25 Jahre lang lebte und dann nach Sankt Petersburg zurückkehrte. Am 18. September 1783 starb Leonhard Euler im Alter von 76 Jahren an einer Hirnblutung.
Das hier behandelte Thema schließt an die Fourier-Reihen an. Dabei ist die Eulersche Reihe eine sehr einfache, in eine Fourier-Reihe entwickelbare Funktion. Die Bernoulli-Polynome und die Summenformel von Poisson lassen sich auf diese für die Analysis fundamentale Reihe zurückführen.

2 Die EULERsche Reihe

LEONARD EULER teilte im Jahre 1744 folgende Identität CHRITIAN GOLDBACH in einem Brief mit:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{n} = \frac{1}{2} - x, \qquad 0 < x < 1 \tag{2.1}$$

Wir nennen die Reihe die EULERsche Reihe.

Bemerkung 2.1 Die EULERsche Reihe kann man allgemeiner formulieren als folgende trigonometrische Funktionenreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi inx}}{n}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad x \notin \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

2.1 Die Vorbereitung

Die Funktion $e(x) := e^{2\pi ix}$ hat offensichtlich die Periode 1:

$$e^{2\pi i(x+1)} = \cos\left[2\pi(x+1)\right] + i\sin\left[2\pi(x+1)\right] = \cos(2\pi x + 2\pi) + i\sin(2\pi x + 2\pi)$$

mithilfe der *Additionstheoreme* ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} e^{2\pi i(x+1)} &= \cos(2\pi x)\cdot\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \sin(2\pi x)\cdot\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0} + i\left[\sin(2\pi x)\cdot\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \cos(2\pi x)\cdot\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\right] \\ &= \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x) = e^{2\pi ix} \end{aligned}$$

Für die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ konvergiert die Reihe (2.2) nicht: Aufgrund der Periodizität der Reihe betrachte man o.B.d.A den Fall $x = 0$ und erhält die harmonische Reihe, die nicht konvergiert. Daher genügt es also die Reihe auf dem offenen Intervall $I = (0, 1)$ zu untersuchen.

Die Funktionenreihe ist eine Abbildung des Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ des Körpers der reellen Zahlen in den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Eine Funktion u mit dieser Eigenschft ist eindeutig in einen Realteil $u_1 : I \to \mathbb{R}$ und einen Imaginärteil $u_2 : I \to \mathbb{R}$ zerlegbar und es gilt

$$u(x) = u_1(x) + iu_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

$u(x)$ ist genau dann differenzierbar, wenn u_1 und u_2 differenzierbar sind und es folgt:

$$u'(x) = u_1'(x) + iu_2'(x)$$

Für die Exponentialfunktion gilt die Ableitungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{ix} = ie^{ix}$$

Später werden wir sehen, dass die EULERsche Reihe den Imaginärteil der Funktionenreihe (2.2) bildet. Desweitern sollten die EULERschen Formeln aus der ANALYSIS I bekannt sein:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \wedge \qquad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

2.2 Differentiation und Konvergenz von Reihen

Zur genauen Untersuchung der Trigonometrischen Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi inx}}{n}$ spielt die Betrachtung der gliedweisen Differentiation von Reihen eine wichtige Rolle. Hierfür benötigt man folgenden

Satz 2.2 *Sei die Funktionenreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n(x) \tag{2.3}$$

konvergent in einem Punkt des offenen Intervalls I und sind alle $\lambda_n : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, und ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n'(x) \tag{2.4}$$

auf I gleichmäßig konvergent, dann konvergiert (2.3) *auf I gleichmäßig gegen die Grenzfunktion*

$$\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n(x), \qquad x \in I$$

und $\lambda : I \to R$ *ist differenzierbar mit*

$$\lambda'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n'(x), \qquad x \in I$$

Bemerkung 2.3 Bei der Anwendung des *Satzes 2.2* muss also die zu betrachtende Funktionenreihe formal gliedweise abgeleitet werden, um dann die so neu enstandene Reihe auf gleichmäßige Konvergenz zu prüfen, da man auf die gleichmäßige Konvergenz der formal abgeleiteten Reihe nicht verzichten darf.

3 Hauptsatz und Beweis

Satz 3.1 *Sei das Intervall $I := (0,1)$ gegeben. Seien des weiteren $a, b \in I,\ a < b$ zwei Punkte aus I. Die Funktionenreihe (3.1) konvergiert gleichmäßig auf $\bar{I} := [a,b]$ und es gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{n} = -\log\left[2\sin(\pi x)\right] + i\pi\left(\frac{1}{2} - x\right), \quad 0 < x < 1 \tag{3.1}$$

Beweis. Gleichmäßige Konvergenz mithilfe des Cauchy-Kriteriums.
Zu zeigen bleibt: $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}: \quad q > p \geq N$ sodass:

$$a \cdot \left| \sum_{k=p}^{q} \frac{e^{2\pi i k x}}{k} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \bar{I}, \quad a > 0 \ \text{ konstant}$$

$$\begin{aligned}
\left(1 - e^{2\pi i x}\right) \sum_{k=p}^{q} \frac{e^{2\pi i k x}}{k} &= \sum_{k=p}^{q} \frac{e^{2\pi i k x}}{k} - e^{2\pi i x} \sum_{k=p}^{q} \frac{e^{2\pi i k x}}{k} \\
&= \sum_{k=p}^{q} \frac{e^{2\pi i k x}}{k} - \sum_{k=p}^{q} \frac{e^{2\pi i (k+1) x}}{k} \\
&= \frac{e^{2\pi i p x}}{p} + \sum_{k=p+1}^{q} \frac{e^{2\pi i k x}}{k} - \sum_{k=p+1}^{q} \frac{e^{2\pi i k x}}{k-1} - \frac{e^{2\pi i (q+1) x}}{q} \\
&= \frac{e^{2\pi i p x}}{p} - \frac{e^{2\pi i (q+1) x}}{q} + \sum_{k=p+1}^{q} e^{2\pi i k x}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) \\
\Rightarrow \left|1 - e^{2\pi i n x}\right| \cdot \left| \sum_{n=q}^{q} \frac{e^{2\pi i k x}}{k} \right| &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \sum_{k=p+1}^{q} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{p}
\end{aligned}$$

Setze $a := \max\limits_{x \in I} \left|1 - e^{2\pi i x}\right|$

$$\Rightarrow a \cdot \left| \sum_{k=p}^{q} \frac{e^{2\pi i k x}}{k} \right| \leq \frac{2}{p} =: \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Auf $\bar{I}$ konvergiert die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k} \tag{3.2}$$

gleichmäßig und es gilt

$$\left(1 - e^{2\pi i x}\right) \cdot f(x) = e^{2\pi i x} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k(k-1)} \tag{3.3}$$

Nach *Satz 2.1* differenziere man also die Funktionenreihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k(k-1)}$ formal gliedweiße nach x. Daraus folgt für die Reihe:

$$\sum_{k=2}^{\infty} f_n'(x) = 2\pi i \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k e^{2\pi i k x}}{k(k-1)} = 2\pi i \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k-1} = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (k+1) x}}{k} = 2\pi i e^{2\pi i x} \cdot f(x)$$

$\sum_{k=2}^{\infty} f_k'(x)$ ist auf $\bar{I}$ ebenfalls gleichmäßig konvergent, und daher greift *Satz 2.2* und es folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-e^{2\pi ix}\right)\cdot f(x)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{2\pi ix} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{2\pi ikx}}{k(k-1)}\right]$$

- Für die linke Seite der Gleichung ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-e^{2\pi ix}\right)\cdot f(x)\right] = -2\pi i e^{2\pi ix}\cdot f(x) + \left(1-e^{2\pi ix}\right)\cdot f'(x)$$

- und für die rechte Seite:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{2\pi ix} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{2\pi ikx}}{k(k-1)}\right] = 2\pi i e^{2\pi ix} - 2\pi i e^{2\pi ix}\cdot f(x)$$

$$\Rightarrow -2\pi i e^{2\pi ix}\cdot f(x) + \left(1-e^{2\pi ix}\right)\cdot f'(x) = 2\pi i e^{2\pi ix} - 2\pi i e^{2\pi ix}\cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2\pi i e^{2\pi ix}}{1-e^{2\pi ix}} = \frac{\pi e^{\pi ix}}{-\frac{e^{-\pi ix}}{2i}\left(-1+e^{2\pi ix}\right)} = \frac{-\pi e^{\pi ix}}{\frac{1}{2i}\left(e^{\pi ix}-e^{-\pi ix}\right)} = \frac{-\pi\cos(\pi x) - \pi i\sin(\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

$$= -\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \pi i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[-\log\left[2\sin(\pi x)\right] + \pi ix + c\right]$$

also folgt für $f(x)$:

$$f(x) = -\log\left[2\sin(\pi x)\right] - \pi ix + c,\ x\in(0,1)$$

mit einer Konstanten c. Setze man $x=\frac{1}{2}$, so ergibt sich für $f(x)$ die alternierende harmonische Reihe, die bekanntlich $-\log(2)$ ergibt:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\pi ik}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\log(2) \quad \text{(Bekannt aus der Analysis I)}$$

und folglich ergibt sich für c

$$\begin{aligned} -\frac{\pi i}{2} + c &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad c &= \frac{\pi i}{2} \end{aligned}$$

und folglich für $f(x)$:

$$f(x) = -\log\left[2\sin(\pi x)\right] - \pi ix + \frac{\pi i}{2} = -\log\left[2\sin(\pi x)\right] + i\pi\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

$\square$

Bemerkung 3.2 Die Gleichung (2.5) kann man auch schreiben als

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\left(k-\frac{1}{2}\right)x}}{n(n-1)} = e^{\pi ix} + 2i\cdot\sin(\pi x)\cdot f(x)$$

Beweis. (2.5):

$$
\begin{aligned}
\left(1 - e^{2\pi i x}\right) \cdot f(x) &= e^{2\pi i x} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k(k-1)} \\
\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k x}}{k(k-1)} &= e^{2\pi i x} - f(x) + e^{2\pi i x} \cdot f(x) \\
\Leftrightarrow e^{\pi i x} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \left(k-\frac{1}{2}\right) x}}{k(k-1)} &= e^{2\pi i x} - f(x) + e^{2\pi i x} \cdot f(x) \\
\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \left(k-\frac{1}{2}\right) x}}{k(k-1)} &= e^{\pi i x} - e^{-\pi i x} \cdot f(x) + e^{\pi i x} \cdot f(x) \\
&= e^{\pi i x} + \left(e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}\right) \cdot f(x) \\
&= e^{\pi i x} + 2i \cdot \sin(\pi x) \cdot f(x)
\end{aligned}
$$

□

4 Die Reihen $P_m(x)$

Betrachte man nun den Imaginärteil von (3.1), so erhält man:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{n} = \frac{1}{2} - x, \qquad 0 < x < 1 \tag{4.1}$$

Bemerkung 4.1 Setzt man in (4.1) $x = \frac{1}{4}$, so erhält man die Leibnizreihe und einen Beweis für die Konvergenz dieser gegen $\frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{n} &= \frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{n} &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

und es ergibt sich für die Reihe:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)}{2n-1} + \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot 2\pi n\right)}{2n}}^{=0}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n\pi - \frac{1}{2}\pi\right)}{2n-1}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overbrace{\sin(n\pi)}^{=0}\cdot\cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + \overbrace{\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)}^{=-1}\cdot\overbrace{\cos(\pi n)}^{=(-1)^n}}{2n-1}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{2n-1}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} &= \frac{\pi}{4} \qquad \text{(Leibniz-Reihe)}
\end{aligned}$$

An den Randstellen $x = 0$ und $x = 1$ von (4.1) ergibt sich für $\sin(2\pi nx)$ der Wert 0. Definiere man jetzt mithilfe der Gauss-Klammer:

$$P_1(x) = \left\{\begin{array}{ll} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Z}\end{array}\right\} \tag{4.2}$$

Dann ergibt sich für (4.1):

$$P_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}, \tag{4.3}$$

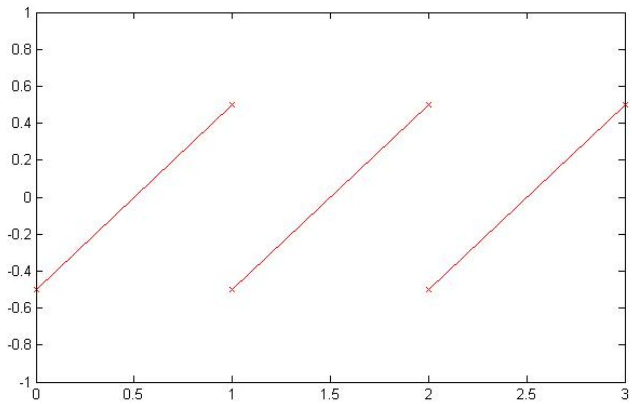

Abbildung 4.1: Der Graph von P_1 im Intervall $[0, 3]$, die sog. "Sägezahnkurve"

Definiere man jetzt $P_m(x)$, $x \in \mathbb{R}$ für $m > 1$ durch die Reihen

$$\begin{aligned} P_{2n} &:= (-1)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos(2\pi kx)}{(2\pi k)^{2n}} \quad , \\ P_{2n-1} &:= (-1)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(2\pi kx)}{(2\pi k)^{2n+1}} \quad . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Reihen $P_n(x)$ sind absolut und gleichmäßig konvergnet, daher gilt nach *Satz 2.2*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_{m+1}(x) = P_m(x), \quad m > 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_2(x) = P_1(x), \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$$

Man weiß für $P_1(x)$:

$$P_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1$$

und erhält für $P_2(x)$:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + p_2, \quad 0 < x < 1$$

ein Polynom vom Grad 2 mit einer Konstanten p_2. Per Induktion nach m zeigt man dann, dass jedes $P_m(x)$ im Intervall $(0, 1)$ ein Polynom vom Grad m ist.
An diesem Punkt lassen sich die Bernoulli-Polynome anschließen.

Definition 4.2 Die Folge $B_k(x)$ von reelen Polynomen mit folgenden Eigenschaften:

a) $B_0(x) = 1$

b) $B_k'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B_k(x) = n \cdot B_{k-1}(x), \quad k \geq 1$

c) $\int_0^1 B_k(t) \; \mathrm{d}t = 0$

heißen Bernoulli-Polynome.

Setzt man jetzt:

$$\mathcal{B}_k(x) := k! \cdot P_k(x), \qquad \mathcal{B}_0(x) = 1 \tag{4.5}$$

und untersucht die Funktionenfolge $\mathcal{B}_k(x)$ auf die in **Defintion 4.2** angegebenen Eigenschaften:

a) $\mathcal{B}_0(x) = 1$

b) $\mathcal{B}'_k(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k! \cdot P_k(x)\right] = k \cdot (k-1)! \cdot P_{k-1}(x) = k \cdot \mathcal{B}_{k-1}(x), \quad k \geq 1$

c) $\int_0^1 \mathcal{B}_k(x) \ \mathrm{d}x = 0$

für den Fall, dass $k = 2n$ folgt für $\mathcal{B}_k$:

$$\int_0^1 (2n)! \cdot (-1)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos(2\pi kx)}{(2\pi k)^{2n}} \ \mathrm{d}x = \frac{2 \cdot (2n)! \cdot (-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n+1}} \cdot \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k^{2n+1}}\right]_0^1}_{=0} = 0$$

für den Fall, dass $k = 2n - 1$ folgt für $\mathcal{B}_k$:

$$\int_0^1 (2n+1)! \cdot (-1)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(2\pi kx)}{(2\pi k)^{2n+1}} \ \mathrm{d}x = \frac{2 \cdot (2n+1)! \cdot (-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2(n+1)}} \cdot \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\cos(2\pi kx)}{k^{2(n+1)}}\right]_0^1}_{=0} = 0$$

Es ergibt sich also, dass die Folge $\mathcal{B}_k(x)$ im Intervall $0 < x < 1$ die Bernoulli-Polynome bilden. Definiert man die Nullstellen der Bernoulli-Polynome als die Bernoulli-Zahlen B_n und setzt man als bekannt vorraus, dass alle Bernoulli-Zahlen *rational* sind, so erhält man für $B_{2k}(0)$, $k > 0$:

$$B_{2k}(0) = (2k)! \cdot P_{2k}(0) = (2k)! \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \cos(0)}{(2\pi n)^{2k}} = (2k)! \cdot \frac{2}{(2\pi)^{2k}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (2k)! \cdot \frac{2}{(2\pi)^{2k}} \cdot \zeta(2k)$$

$$\Leftrightarrow \pi^{2k} = \frac{(2k)! \cdot 2}{2^{2k} B_{2k}} \cdot \zeta(2k)$$

Damit hat man gezeigt, dass $\zeta(n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ für gerades $n \geq 2$ ein rationales Vielfaches von π^n ist.

Literatur

[1] Max Koecher: Klassische elementare Analysis Birkhäuser Verlag, 1987.

[2] http://de.wikipedia.org/