RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Bernoullipolynome und Bernoullizahlen

Artjom Zern

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis*
(Sommersemester 2009, Leitung Prof. Dr. Eberhard Freitag)

Zusammenfassung: Wie aus dem Titel ersichtlich ist das Thema des Vortrages die Bernoullische Zahlen und Polynome. Der Vortrag selbst und somit auch die Ausarbeitung sind in vier Teile gegliedert. Am Anfang, also in der Einführung, wird kurz erwähnt, wo in der Mathematik die Bernoullische Zahlen und Polynome gebraucht werden und vorkommen. Anschließenden erhält man eine kurze Information über Jakob Bernoulli, dem Entdecker der nach ihm benannten Zahlen und Polynome, und zwei seiner Verwandten. Im zweiten Teil wird die Defintion der Bernoullischen Polynome und Zahlen genannt und aus dieser dann einige Eigenschaften der Polynome und Zahlen abgeleitet, durch welche man eine bessere Vorstellung von den Bernoullipolynome und -zahlen bekommen soll. Im dritten Teil wird eine wichtige Funktionalgleichung für die Bernoullipolynome genannt und bewiesen, die im vierten Teil für die Herleitung der allgemeinen Formel für Potenzsummen verwendet wird.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

0 Einführung

Die Bernoullischen Polynome und Bernoullischen Zahlen wurden bei der Suche nach einer geschlossenen Formel für die Potenzsummen entdeckt. Deswegen ist die allgemeine Formel für die Potenzsummen, die im Folgenden noch hergeleitet wird, das erste Anwendungsbeispiel für die Bernoullischen Zahlen und Polynome. Ein weiteres Anwendungsbeispiel ist die Eulersche Summenformel, die als Verallgemeinerung von den Potenzsummen angesehen werden kann, da mit dieser nicht die Summe von Potenzen sondern allgemein eine Summe der Form $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ bestimmt wird. Desweiteren tretten die Bernoullizahlen als Koeffizienten in Taylorreihen von trigonometrischen, hyperbolischen und anderen Funktionen auf. Und schließenlich tauchen sie in der Zahlentheorie, insbesondere bei speziellen Werten der Riemannschen Zeta-Funktion, auf.
Dies war ein kurzer Einblick wofür die Bernoullischen Zahlen und Polynome gebraucht werden. Nun eine paar Informationen zu dem Entdecker dieser Zahlen und Polynome, nämlich Jakob Bernoulli.

Jakob Bernoulli (* 6. Januar 1655 in Basel, † 16. August 1705 in Basel) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Er war ab 1687 Professor für Mathematik an der Universität Basel. Er entdeckte die nach ihm benannten Zahlen und Polynome, mit denen er auch die allgemeine Formel für Potenzreihen hergeleitet hat. Ein weiteres Resultat, das nach ihm benannt ist, ist die Bernoullische Ungleichung. Außerdem war er der Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitstheorie und leistete in diesem Gebiet wichtige Beiträge, wie z.B. das Bernoulli-Experiment, die Bernoulli-Verteilung oder das Gesetz der großen Zahlen. Desweiteren untersuchte er Potenzreihen, insbesondere mit Hilfe der Bernoullizahlen und Polynome.
Weil Jakob Bornoulli nicht der einzige berühmte Mathematiker aus der Familie Bernoulli war, sollen hier noch zwei Verwandte von Jakob Bernoulli erwähnt werden.

Johann Bernoulli (* 6. August 1667 in Basel, † 1. Januar 1748 in Basel) war ein Schweizer Mathematiker und Arzt. Er war der jüngere Bruder von Jakob Bernoulli. Er unternahm Reisen nach Genf und nach Paris, wo er seine Kenntnisse in der Analysis verbreitete, die damals eine recht neue Disziplin in der Mathematik war. Auf seiner Reise nach Paris lernte er seinen Schüler Marquis de l'Hopital kennen, dem er seine berühmte Formel zur Grenzwertbestimmung verkauft hat, die heute als die Regel von l'Hopital bekannt ist. Außerdem beschäftigte er sich mit Reihen, Differentialgleichungen und Kurven und bearbeitete und verbreitete zusammen mit seinem Bruder Jakob die Infinitesimalrechnung von Leibniz. Nach dem Tod seines Bruders übernahm er dessen Professur an der Universität Basel. Zu seinen Schülern gehörten unter Anderen Leonhard Euler und Gabriel Cramer.
Der nächste berühmte Mathematiker aus der Familie Bernoulli ist Daniel Bernoulli, der Sohn von Johann Bernoulli.

Daniel Bernoulli (* 8. Februar 1700 in Groningen; † 17. März 1782 in Basel) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker, zumindest wurde er in diesen Gebieten berühmt. Er studierte Medizin erst in Basel und später in Heidelberg. In Basel erhielt er später den Lehrstuhl für Anatomie und Botanik und 17 Jahre darauf den ersehnten Lehrstuhl für Physik. Seine Arbeiten umfassen die Gebiete Hydraulik, Hydrodynamik und Aerodynamik.

1 Definition

Definition 1.1 Man definiert die Folge der Bernoulli-Polynome $B_n(x), n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$B_0(x) = 1 \tag{B.0}$$

$$B_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B_n(x) = n \cdot B_{n-1}(x) \qquad \text{für} \;\; n \geq 1 \tag{B.1}$$

$$\int\limits_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{für} \;\; n \geq 1 \tag{B.2}$$

Definition 1.2 Zur Polynomfolge $B_n(x)$ definiere man die Zahlenfolge B_n durch

$$B_n := B_n(0) \qquad \text{für} \;\; n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt aus (B.1) und (1.1)

$$B_n(x) = n \cdot \int\limits_0^x B_{n-1}(t)\mathrm{d}t + B_n \qquad \text{für} \;\; n \geq 1 \tag{1.2}$$

Mit (B.2) folgt nun

$$B_n(1) = n \cdot \int\limits_0^1 B_{n-1}(t)\mathrm{d}t + B_n = B_n \qquad \text{für} \;\; n \geq 2$$

Zusammen mit $B_0(1) = B_0 = 1$ erhält man

$$B_n(1) = B_n \qquad \text{für} \;\; n \neq 1 \tag{1.3}$$

Aus (1.2) und (B.0) folgt durch vollständige Induktion nach n

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} \qquad \text{für} \;\; n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.4}$$

Beweis:
Induktionsanfang ($n = 0$):

$$B_0(x) = 1 = \binom{0}{0} \cdot B_0 \cdot x^0$$

Induktionsvoraussetzung:

Sei für ein $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $B_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-1-k}$ erfüllt.

Induktionsschritt ($n-1 \rightsquigarrow n$):

$$
\begin{aligned}
B_n(x) &= n \cdot \int_0^x B_{n-1}(t)\mathrm{d}t + B_n \\
&= n \cdot \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot t^{n-1-k}\mathrm{d}t + B_n \\
&= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} \cdot B_k \cdot \int_0^x t^{n-1-k}\mathrm{d}t \right] + B_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n \cdot \binom{n-1}{k} \cdot \frac{1}{n-k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} + B_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} + B_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}
\end{aligned}
$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit die Gleichung $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen. $\blacksquare$

Anhand der Gleichung (1.4) sieht man nun, dass die Bernoullipolynome normiert sind. Mit (1.3) folgt weiterhin aus (1.4)

$$
B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k \qquad \text{für} \quad n \neq 1 \tag{1.5}
$$

Ersätzt man n durch $n+1$, so erhält man

$$
\begin{aligned}
B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k + (n+1) \cdot B_n + B_{n+1} \qquad \text{für} \quad n \geq 1
\end{aligned}
$$

Daraus folgt die rekursive Formel

$$
B_n = -\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \qquad \text{für} \quad n \geq 1 \tag{1.6}
$$

Aus dieser Formel erkennt man, dass alle Bernoullischen Zahlen rational sind. Außerdem erkennt man, dass die Bernoullischen Zahlen durch die Eigenschaften (B.0), (B.1) und (B.2) eindeutig festgelegt sind und somit auch die Bernoullischen Polynome, wie

man aus (1.4) sieht.
Mit (1.4) bzw. (1.2) kann man nun nacheinander die Bernoullischen Polynome bestimmen. In der Tabelle 1 sind die ersten sieben Bernoullischen Zahlen und Polynome aufgelistet.
In Abblidung 1.1 sind einige Bernoullische Polynome im Intervall $[0,1]$ zu sehen.

$$\begin{array}{lll}
B_0 = 1 & B_0(x) = 1 & = 1 \\
B_1 = -\dfrac{1}{2} & B_1(x) = x - \dfrac{1}{2} & = y \\
B_2 = \dfrac{1}{6} & B_2(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{6} & = y^2 - \dfrac{1}{12} \\
B_3 = 0 & B_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x & = y^3 - \dfrac{1}{4}y \\
B_4 = -\dfrac{1}{30} & B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \dfrac{1}{30} & = y^4 - \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{7}{240} \\
B_5 = 0 & B_5(x) = x^5 - \dfrac{5}{2}x^4 + \dfrac{5}{3}x^3 - \dfrac{1}{6}x & = y^5 - \dfrac{5}{6}y^3 + \dfrac{7}{48}y \\
B_6 = \dfrac{1}{42} & B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \dfrac{5}{2}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 & = y^6 - \dfrac{5}{4}y^4 + \dfrac{7}{16}y^2 - \dfrac{3}{64}
\end{array}$$

mit $y = x - \frac{1}{2}$

Tabelle 1: Die ersten 7 Bernoullische Zahlen und Polynome

Weitere Bernoullische Zahlen sind

$$\begin{aligned}
&B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \\
&B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \quad B_{18} = \frac{43867}{798}, \quad B_{20} = -\frac{174611}{330}, \quad B_{22} = \frac{854513}{138}, \quad \ldots
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Bemerkung 1.3

1) Durch (B.0) und (B.1) alleine sind die Bernoullischen Polynome nicht eindeitig festgelegt. Erst wenn man mit (B.2) die Bernoullischen Zahlen, also die Integrationskonstanten in (1.2), festlegt, sind die Polynome eindeutig festgelegt, wie man mit (1.4) einsieht. Würde man die B_n, $n \in \mathbb{N}$ auf andere Weise festlegen als mit (B.2), so würde man andere Polynome erhalten. Im Falle $\widetilde{B}_n = 0$ folgt aus (1.4), dass $\widetilde{B}_n(x) = x^n$, und im Falle $\widehat{B}_n = 1$ folgt aus (1.4), dass $\widehat{B}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} = (1+x)^n$.

2) Wie man anhand der Abbildung 1.1 oder anhand der Substitution $y = x - \frac{1}{2}$ in der Tabelle 1 sehen kann, haben die Bernoullischen Polynome eine gewisse Symmetrie an der Stelle $x = \frac{1}{2}$. Diese Symmetrie wird im Folgenden in Korollar 2.2 bewiesen. Aus dieser Symmetrie folgt dann auch die Beobachtung in (1.7), dass alle Bernoullizahlen mit ungeradem Index ≥ 3 verschwinden.

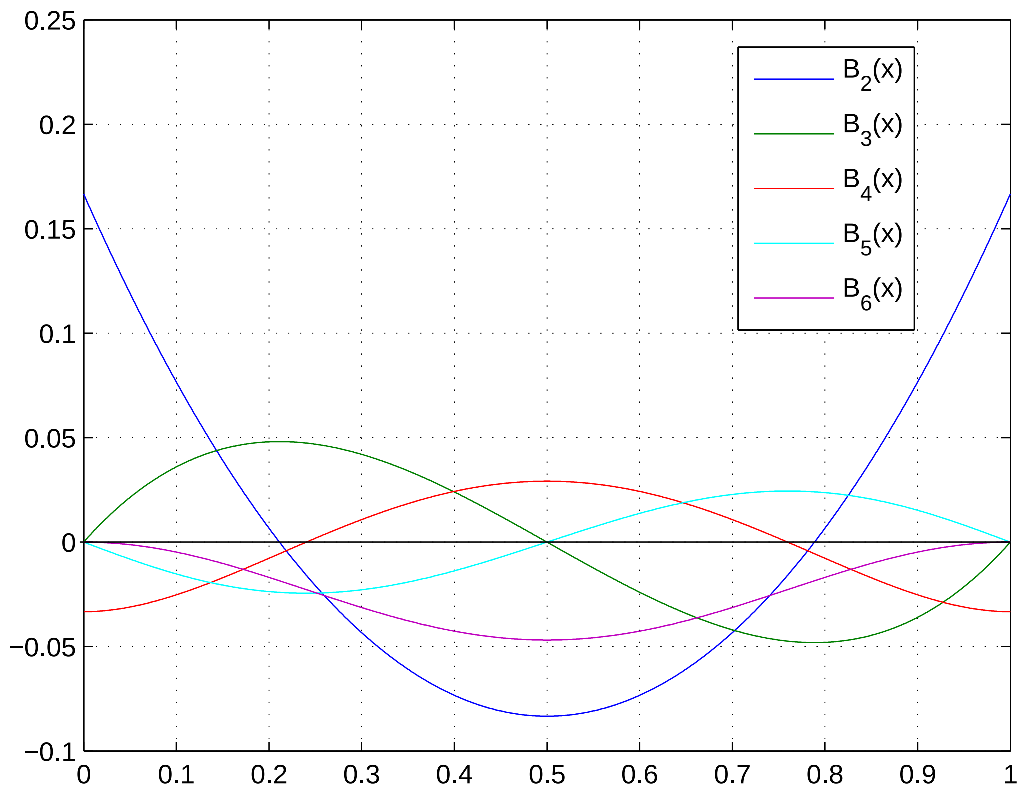

Abbildung 1.1: Bernoulli-Polynome im Intervall [0,1]

2 Funktionalgleichung

Satz 2.1

a) Es ist $B_n(x+1) - B_n(x) = n \cdot x^{n-1}$ *für* $n \geq 1$

b) Ist $P(x)$ *ein Polynom mit der Eigenschaft* $P(x+1) - P(x) = n \cdot x^{n-1}$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$, *dann ist* $P(x) = B_n(x) + c$ *mit einer Konstanten* $c \in \mathbb{R}$.

Beweis:

a) Sei $F_n(x) := B_n(x+1) - B_n(x)$.
Aus (B.1) folgt

$$F_n'(x) = B_n'(x+1) - B_n'(x) = n \cdot B_{n-1}'(x+1) - n \cdot B_{n-1}'(x) = n \cdot F_{n-1}(x)$$

Außerdem folgt aus (1.3)

$$F_n(0) = B_n(1) - B_n(0) = 0 \qquad \text{für} \quad n \neq 1$$

Damit erhalt man nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$F_n(x) = n \cdot \int\limits_0^x F_{n-1}(t)\mathrm{d}t \qquad \text{für} \;\; n \geq 2$$

Mit $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ erhält man

$$F_1(x) = B_1(x+1) - B_1(x) = 1$$

Nun zeigt man durch eine vollständige Induktion nach n, dass $F_n(x) = n \cdot x^{n-1}$ ist für $n \geq 1$.
Induktionsanfang ($n = 1$):

$$F_1(x) = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$$

Induktionsvoraussetztung:

Sei für ein $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $F_n(x) = n \cdot x^{n-1}$ erfüllt.

Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n+1$):

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= (n+1) \cdot \int\limits_0^x F_n(t)\mathrm{d}t \\ &= (n+1) \int\limits_0^x n \cdot t^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

Damit ist nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

b) Sei $F(x) := P(x) - B_n(x)$. Dann ist $F(x)$ ein Polynom mit der Eigenschaft

$$F(x+1) = P(x+1) - B_n(x+1) = P(x) + n \cdot x^{n-1} - \left(B_n(x) + n \cdot x^{n-1}\right) = F(x)$$

(also ist $F(x)$ periodisch mit Periode 1). Hätte F einen Grad größer als 1, dann würde man durch Differentiation ein Polynom $G(x)$ mit Grad 1 erhalten, das die Eigenschaft $G(x+1) = G(x)$ besitzt, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Somit ist F konstant und damit $P(x) = B_n(x) + c$, mit $c = F(x) \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Korollar 2.2 *$B_n(1-x) = (-1)^n \cdot B_n(x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Man betrachtet das Polynom $P(x) = (-1)^{n+1} \cdot B_{n+1}(1-x)$. Nach Teil a) vom Satz 2.1 folgt

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= (-1)^{n+1} \cdot [B_{n+1}(-x) - B_{n+1}(1-x)] \\ &= (-1)^n \cdot [B_{n+1}(1-x) - B_{n+1}(-x)] \\ &= (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (-x)^n \\ &= (n+1) \cdot x^n \end{aligned}$$

Nach Teil b) vom Satz 2.1 folgt

$$(-1)^{n+1} \cdot B_{n+1}(1-x) = P(x) = B_{n+1}(x) + c \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Durch Differenzieren beider Seiten erhält man

$$(-1)^n \cdot (n+1) \cdot B_n(1-x) = (n+1) \cdot B_n(x)$$

und damit die Behauptung. ∎

Korollar 2.3 *$B_{2m+1} = 0$ für $m \geq 1$.*

Beweis:
Setzt man $x = 0$ im Korollar 2.2, so erhält man $B_n(1) = (-1)^n \cdot B_n$ für $n \geq 1$. Aus (1.3) folgt somit

$$(-1)^n \cdot B_n = B_n(1) = B_n \qquad \text{für } \; n \geq 2$$

Für ungerade $n \geq 3$ ist somit $B_n = 0$. ∎

Korollar 2.4 *Ist $P(x)$ ein Polynom, für das die Funktionalgleichung*

$$P(x+1) - P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x^{k-1}, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

gilt, dann ist $P(x)$ bis auf eine additive Konstante gegeben durch

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \cdot B_k(x)$$

Beweis:
Sei $P(x)$ ein Polynom mit der Eigenschaft $P(x+1) - P(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot x^{k-1}$, $a_k \in \mathbb{R}$. Man

betrachtet das Polynom $F(x) := P(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \cdot B_k(x)$. Nach Teil a) vom Satz 2.1 ist

$$\begin{aligned} F(x+1) &= P(x+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \cdot B_k(x+1) \\ &= P(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \cdot \left[k \cdot x^{k-1} + B_k(x)\right] \\ &= P(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \cdot B_k(x) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Teil b) des Satzes 2.1 ist F konstant und damit ist
$P(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \cdot B_k(x) + c$, mit $c = F(x) \in \mathbb{R}$. ∎

Bemerkung 2.5 Setzt man $x = \frac{1}{2}$ in Korollar 2.2 so erhält man

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \cdot B_n\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Damit ist $B_{2m+1}(\frac{1}{2}) = 0$ für $m \geq 0$.

3 Potenzsummen

Nach dem Satz 2.1 gilt

$$B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) = (n+1) \cdot k^n \qquad \text{für} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Durch Summieren über k von 1 bis N erhält man

$$\begin{aligned}(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{N} k^n &= \sum_{k=1}^{N} [B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)] \\ &= B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(1)\end{aligned}$$

Mit (1.3) und Teil a) von Satz 2.1 erhält man weiterhin

$$(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{N} k^n = B_{n+1}(N) + (n+1) \cdot N^n - B_{n+1}$$

Mit (1.4) kann man dies in die Form

$$\begin{aligned}(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{N} k^n &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot N^{n+1-k} + (n+1) \cdot N^n - B_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot N^{n+1-k} + (n+1) \cdot N^n\end{aligned}$$

bringen. Beachtet man, dass $B_1 = -\frac{1}{2}$ und $B_{2m+1} = 0$ für $m \geq 1$, so erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k^n &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot N^{n+1-k} + N^n \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \cdot N^{n+1-k} + \frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot N^n + N^n \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2k} \cdot B_{2k} \cdot N^{n+1-2k} + \frac{1}{2} \cdot N^n\end{aligned}$$

und somit schließlich

$$s_n(N) := \sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{N^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} N^n + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \binom{n+1}{2k} \cdot B_{2k} \cdot N^{n+1-2k} \tag{3.1}$$

Die ersten vier Formeln für die Potenzsummen, die man mit Hilfe von (3.1) bekommt, sind

$$\begin{aligned}
s_1(N) = \sum_{k=1}^{N} k &= \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N \\
&= \frac{1}{2}N(N+1) \\
s_2(N) = \sum_{k=1}^{N} k^2 &= \frac{1}{3}N^3 + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N \\
&= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \\
s_3(N) = \sum_{k=1}^{N} k^3 &= \frac{1}{4}N^4 + \frac{1}{2}N^3 + \frac{1}{4}N^2 \\
&= \frac{1}{4}N^2(N+1)^2 \\
s_4(N) = \sum_{k=1}^{N} k^4 &= \frac{1}{5}N^5 + \frac{1}{2}N^4 + \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{30}N \\
&= \frac{1}{30}N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)
\end{aligned}$$

Dabei erhält man für $s_1(N)$, $s_2(N)$ und $s_3(N)$ die bekannten Formeln.

Bemerkung 3.1 Wie man an den ersten vier Formeln sieht, tauchen bei allen vier die Faktoren N und $N+1$ auf. Man kann sich leicht überlegen, dass dies kein Zufall ist. Aus der oberen Herleitung für die allgemeine Formel für Potenzsummen ist folgende Formel ersichtlich.

$$s_n(N) = \frac{1}{n+1}B_{n+1}(N+1) - \frac{1}{n+1}B_{n+1}(1) \qquad \text{für} \quad n \geq 1$$

Damit erhält man mit (1.3), dass

$$\begin{aligned}
s_n(-1) &= \frac{1}{n+1}B_{n+1}(0) - \frac{1}{n+1}B_{n+1}(1) = 0 \\
s_n(0) &= \frac{1}{n+1}B_{n+1}(1) - \frac{1}{n+1}B_{n+1}(1) = 0
\end{aligned}$$

Also erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$ die Faktoren N und $N+1$.
Man kann nun mit

$$\begin{aligned}
s_n'(N) &= B_n(N+1) \\
s_n''(N) &= n \cdot B_{n-1}(N+1)
\end{aligned}$$

überlegen, mit welcher Häufigkeit die Faktoren auftauchen.

Für gerade $n \geq 2$ folgt aus Korollar 2.3 und Bemerkung 2.5

$$\begin{aligned} s_n'(-1) &= B_n(0) \neq 0 \\ s_n'(0) &= B_n(1) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{n+1}B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n+1}B_{n+1}(1) = 0 \\ s_n'\left(-\frac{1}{2}\right) &= B_n\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0 \end{aligned}$$

Damit tauchen für gerade $n \geq 2$ in $s_n(N)$ die Faktoren N, $N+1$ und $2N+1$ jeweils einfach auf.
Für ungerade $n \geq 3$ ist nach Korollar 2.3

$$\begin{aligned} s_n'(-1) &= B_n(0) = 0 \\ s_n''(-1) &= n \cdot B_{n-1}(0) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n'(0) &= B_n(1) = 0 \\ s_n''(0) &= n \cdot B_{n-1}(1) \neq 0 \end{aligned}$$

Also tauchen für ungerade $n \geq 3$ in $s_n(N)$ die Faktoren N^2 und $(N+1)^2$ auf.
Jedoch kann man im Allgemeinen keine weiteren 'schönen' Faktoren in $s_n(N)$ erwarten, wie die folgenden Beispiele zeigen.

$$\begin{aligned} s_5(N) &= \frac{1}{12}N^2(N+1)^2(2N^2+2N-1) \\ s_6(N) &= \frac{1}{42}N(N+1)(2N+1)(3N^4+6N^3-3N+1) \\ s_7(N) &= \frac{1}{24}N^2(N+1)^2(3N^4+6N^3-N^2-4N+2) \\ s_8(N) &= \frac{1}{90}N(N+1)(2N+1)(5N^6+15N^5+5N^4-15N^3-N^2+9N-3) \end{aligned}$$

Literatur

[1] Max Koecher: Klassische elementare Analysis. Birkhauser Verlag, 1987.

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Jakob_I._Bernoulli

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli

[4] http://de.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli