Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 6, Abgabe bis zum 27.05.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 17 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, versehen mit der Euklidschen Geometrie ($g_{ij} = \delta_{ij}$). Man gebe eine explizite Formel für

$$*(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p})$$

an. Man zeige, dass

$$\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

die Volumenform ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 18 Sei U wie oben und $Lf = \sum_{\nu=1}^n \partial_\nu^2 f$ der gewöhnliche Laplaceoperator. Man zeige, dass der Laplace-Beltrami-Operator (bis auf ein Vorzeichen) durch

$$\Delta\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_p} f_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}\right) = \sum L(f_{i_1,\ldots,i_p}) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

gegeben ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 19 Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter und $X = \mathbb{R}^n/L$ der assoziierte Torus. Man beweise

$$b^p(X) = \binom{n}{p}.$$

(4 Punkte)