Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 13, Abgabe bis zum 15.07.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 42 Man zeige: Jede kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{C}^n$ ist eine endliche Menge.

(4 Punkte)

Aufgabe 43 Eine Teilmenge $\mathfrak{g} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt Lie-Algebra, falls gilt

1. $\mathfrak{g}$ ist ein Untervektorraum und
2. $A, B \in \mathfrak{g} \Rightarrow [A, B] := AB - BA \ \in \mathfrak{g}$.

Man zeige, dass die Menge der Matrizen mit Spur 0 eine Lie-Algebra ($\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$) bilden. Im Fall $n = 2$ zeige man, dass

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden. Man drücke $[X, Y]$, $[H, X]$ und $[H, Y]$ durch die Basis aus.

(4 Punkte)

Aufgabe 44 Sei V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum und h eine positiv definite hermitesche Form auf V. Wir betrachten für jedes $m \in \mathbb{N}$ den Raum

$$Alt_{\mathbb{R}}(\underbrace{V \times \ldots \times V}_{m-mal}, \mathbb{C})$$

und bezeichnen mit $A^{p,q}$ für $p + q = m$ seinen (p, q)-Anteil. Wir setzen

$$A = \prod_{(p,q)} A^{p,q}.$$

Der Lefschetzoperator $L : A^{p,q} \rightarrow A^{p+1,q+1},\; L(\alpha) = \Omega \times \alpha \; (\Omega = Im(h))$ kann zu einem Operator $L : A \rightarrow A$ zusammengefaßt werden gemäß $L(\omega) = \tilde{\omega},\; \tilde{\omega}_{p,q} := L(\omega_{p-1,q-1})$. In analoger Weise werden $*$ und Λ als Operatoren $A \rightarrow A$ aufgefaßt. Schließlich definieren wir den Projektionsoperator

$$P_m : A \rightarrow A, P_m(\omega) = \tilde{\omega} \;\; mit \;\; \omega_{p,q} = \begin{cases} \omega_{p,q} & p+q=m \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Wir betrachten nun die lineare Abbildung

$$\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow End(A),$$

welche auf Basiselementen durch

$$\begin{aligned} X &\mapsto L, \\ Y &\mapsto \Lambda = *^{-1}L*, \\ H &\mapsto \sum_{m=0}^{2n}(m-n)P_m \end{aligned}$$

gegeben ist. Man zeige: Dies ist eine Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (dh. $\phi([A, B]) = [\phi(A), \phi(B)] := \phi(A)\phi(B) - \phi(B)\phi(A)$).