Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 12, Abgabe bis zum 08.07.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 39 Sei (X, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Kählerform Ω.

1. Man zeige: alle $\Omega^k := \underbrace{\Omega \wedge \ldots \wedge \Omega}_{k-mal}$ sind geschlossen.
2. Man zeige, dass Ω^n bis auf einen konstanten Faktor gleich der Volumenform ist.
3. Man zeige, dass für kompaktes zusammenhängendes X

   $$b^{2k} > 0 \text{ für } 0 \leq k \leq n$$

   gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 40 Sei (X, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit.

1. Man zeige, dass holomorphe Differentialformen stets harmonisch sind.
2. Sei X nun eine kompakte Riemannsche Fläche ($dim X = 1$) mit Kählermetrik h. Dann ist jede harmonische 1-Form ω von der Form $\omega_1 + \bar{\omega}_2$, $\omega_i \in \Omega(X)$ holomorphe 1-Form.

(4 Punkte)

Aufgabe 41 Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ ein offener Teil mit der hermiteschen Metrik $h(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$. Man rechne die Kähleridentität $[\bar{\partial}^*, L] = i\partial$ mit dem Lefschetz-Operator $L(\alpha) = \alpha \wedge \Omega$ nach.

(4 Punkte)