Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 11, Abgabe bis zum 01.07.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 35 Wir definieren $\bar{\partial}^* = -\bar{*}\ \bar{\partial}\ \bar{*}$. Man zeige $\bar{\partial}^* = -*\ \partial\ *$.

(4 Punkte)

Aufgabe 36 Sei (X, h) eine hermitesche komplexe Mannigfaltigkeit. Zur Erinnerung: Für $\alpha, \beta \in A_c^m(X)$ definiert man

$$(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge *\bar{\beta}.$$

Man zeige $(\bar{\partial}\alpha, \beta) = (\alpha, \bar{\partial}^*\beta)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 37 Sei $\bar{\mathbb{C}}$ die Riemannsche Zahlenkugel mit den Standardkarten

$$\varphi : \bar{\mathbb{C}} - \{0\} \to \mathbb{C},\ \varphi(z) = z,$$
$$\psi : \bar{\mathbb{C}} - \{\infty\} \to \mathbb{C},\ \psi(z) = \frac{1}{z} =: w.$$

Gegeben seien zwei Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1. Was ist die Bedingung dafür, dass eine Funktion $h : \bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ existiert mit $h_\varphi = f,\ h_\psi = g$?
2. Was ist die Bedingung dafür, dass es ein Differential ω vom Typ $(1, 0)$ auf $\bar{\mathbb{C}}$ gibt, dessen Komponenten durch $f dz$ und $g dw$ gegeben sind?

(4 Punkte)

Aufgabe 38 Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Man betrachte eine $n \times n$-Matrix (h_{ij}) von differenzierbaren Funktionen auf U, welche in jedem Punkt hermitesch und positiv definit ist. Man zeige, dass es auf U eine eindeutig bestimmte hermitesche Metrik h gibt, so dass die dazu assoziierte Differentialform vom Grad 2 von der Gestalt

$$\frac{i}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

ist.

(4 Punkte)