Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 10, Abgabe bis zum 24.06.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 32 Man beweise das holomorphe Lemma von Poincare für eine "Polykreisscheibe" $U = U_1 \times \ldots \times U_n$, $U_i \subset \mathbb{C}$ offene Kreisscheibe. Es besagt, dass es zu jeder holomorphen p-Form ω $(p > 0)$ mit $d\omega = 0$ eine holomorphe $(p-1)$-Form α mit $\omega = d\alpha$ $(= \partial\alpha)$ gibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 33 Man fasse $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ als Menge der eindimensionalen Vektorräume in $\mathbb{C}^2$ auf. Sei

$$X := \{(P, L) \in C^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid P \in L\}.$$

Man betrachte die Abbildungen

$$\phi_1 : V_1 = C^2 \to X, \ (u, v) \mapsto ((u, uv), [1, v]),$$
$$\phi_2 : V_2 = \mathbb{C}^2 \to X, \ (u, v) \mapsto ((uv, v), [u, 1]).$$

Man zeige, dass die Bilder

$$U_1 = \phi_1(V_1), \ U_2 = \phi_2(V_2)$$

offen in X sind und topologische Abbildungen $U_i \to V_i$ induziert werden. Die Umkehrabbildungen

$$\varphi_1 : U_1 \to V_1, \ \varphi_2 : U_2 \to V_2$$

sind somit Karten. Man zeige, dass sie holomorph verträglich sind und somit eine komplexe Struktur auf X definieren. Man zeige, dass die Abbildung

$$\pi : X \to \mathbb{C}^2, \ \pi(P, L) = P$$

holomorph ist. Man bestimme ihre Fasern $\pi^{-1}(a), \ a \in \mathbb{C}^2$.

(4 Punkte)

Aufgabe 34 Sei $X = \mathbb{C}^n/L$ ein komplexer Torus. Man zeige

$$dim\ \Omega^p(X) = \binom{n}{p}.$$

Es darf benutzt werden, dass jede L-periodische holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}^n$ konstant ist.

(4 Punkte)