Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 9, Abgabe bis zum 17.06.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 28 Auf dem $\mathbb{C}^n$ betrachten wir die Funktion

$$f(z_1, \dots, z_n) = log(1 + z_1\overline{z}_1 + \dots z_n\overline{z}_n).$$

Man berechne die Differentialformen

$$\omega_1 = \partial f,\ \omega_2 = \overline{\partial} f,\ \omega_3 = \partial\overline{\partial} f.$$

Was sind $\partial\omega_3$ und $\overline{\partial}\omega_3$? Für $U = \{(z_i) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 \neq 0\}$ sei $\phi : U \to U$ definiert durch

$$\phi(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1}\right).$$

Man berechne $\phi^*\omega_3$.

(4 Punkte)

Aufgabe 29 Sei $\overline{\mathbb{C}}$ die Riemannsche Zahlenkugel. Man zeige $\Omega^1(\overline{\mathbb{C}}) = 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 30 (a) Zeige, dass $Z = \{[x, y, z, w] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid xy = zw\}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

(b) Zeige, dass die Abbildung

$$\phi : X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C}),\ ([a, b], [c, d]) \mapsto [ac, bd, ad, bc]$$

einen Isomorphismus von komplexen Mannigfaltigkeiten $X \simeq Z$ induziert.

(4 Punkte)

Aufgabe 31 (a) Zeige, dass die Fermat-Kubik

$$K = \{[x, y, z, w] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \mid x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0\}$$

eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist.

(b) Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ heißt Gerade, falls das Urbild in $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ ein komplexer zweidimensionaler Untervektorraum (ohne Nullpunkt) ist. Auf K liegen die 27 Geraden $L_{ijk}(0 \leq i, j, k \leq 2)$ mit

$$\begin{aligned}
L_{0jk} &= \{[a, -\zeta^j a, b, -\zeta^k b] \mid [a, b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\} \\
L_{1jk} &= \{[a, b, -\zeta^j a, -\zeta^k b] \mid [a, b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\} \\
L_{2jk} &= \{[a, b, -\zeta^k b, -\zeta^j a] \mid [a, b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}
\end{aligned}$$

mit $\zeta = exp(\frac{2\pi i}{3})$. Zeige, dass sich jede Gerade mit genau 10 anderen Geraden schneidet.

(4 Punkte)