Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 8, Abgabe bis zum 11.06.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 24 Man beweise für die Wirtinger Operatoren auf $C^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ offen,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

die folgenden Regeln:

1. Produktregel: $\frac{\partial}{\partial z}(fg) = (\frac{\partial}{\partial z}f)g + f(\frac{\partial}{\partial z}g)$.
2. $\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$.
3. $f : U \to \mathbb{C}$ ist holomorph genau dann wenn $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0$.
4. Wenn f holomorph ist, so ist $\frac{\partial f}{\partial z}$ die komplexe Ableitung.
5. $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 25 Man zeige für die Operatoren

$$\partial : A^{p,q}(X) \to A^{p+1,q}(X)$$
$$\overline{\partial} : A^{p,q}(X) \to A^{p,q+1}(X)$$

die Regeln

$$\partial^2 = 0, \quad \partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial, \quad \overline{\partial}^2 = 0.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 26 Man beweise für die Operatoren ∂, $\overline{\partial}$ die Produktregel: Seien $\alpha \in A^{p,q}$, $\beta \in A^{r,s}$, dann gilt

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \partial\beta,$$
$$\overline{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \overline{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \overline{\partial}\beta.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 27 Seien L, L' zwei Gitter in $\mathbb{C}$. Man zeige, dass die komplexen Tori $\mathbb{C}/L$, $\mathbb{C}/L'$ biholomorph äquivalent sind, falls es eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit $L' = aL$ gibt (die Umkehrung gilt auch, ist aber etwas komplizierter).

(4 Punkte)