Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 7, Abgabe bis zum 04.06.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 20 Sei $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, eine stetige Funktion und $\alpha : [0,1] \to D$ eine stetig differenzierbare Kurve. Man definiert das komplexe Kurvenintegral durch

$$\int_\alpha f(z)dz = \int_0^1 f(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)dt.$$

Sei nun D eine offene Teilmenge, welche die Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ enthält und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Man zeige

$$\int_\alpha f(z)dz = 0$$

wobei $\alpha(t) = e^{2\pi it}$ $(0 \leq t \leq 1)$ ist. Hinweis: Man führe dies auf den Satz von Stokes zurück.

(4 Punkte)

Aufgabe 21 Sei X eine zusammenhängende orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Die Eulerzahl von X ist

$$e = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu b^v.$$

(a) Man zeige: Hat X ungerade Dimension, so ist $e = 0$.
(b) Sei $X = S^2$. Man darf benutzen, dass die Eulerzahl $e = 2$ ist. Man berechne die Bettizahlen von X.

(4 Punkte)

Aufgabe 22 Sei (X, g) eine kompakte zusammenhängende orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $f \in C^\infty(X)$ eine Eigenfunktion des Laplace-Beltramioperators, dh. $\Delta f = \lambda f$. Man zeige $\lambda \geq 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 23 (a) Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Man konstruiere natürliche lineare Abbildungen

$$f^* : H^p(Y, \mathbb{R}) \to H^p(X, \mathbb{R}).$$

(b) Sei $f : S^n \to S^n$ eine C^∞-Abbildung, so dass die induzierte Abbildung

$$H^n(S^n, \mathbb{R}) \xrightarrow{f^*} H^n(S^n, \mathbb{R})$$

von Null verschieden ist. Man zeige, dass f surjektiv ist. Tipp: Man benutze das Lemma von Poincare für $\mathbb{R}^n$.

(Bemerkung: Da $H^n(S^n, \mathbb{R})$ eindimensional ist, gilt $f^*(a) = \alpha a$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Man kann zeigen, dass $\alpha \in \mathbb{Z}$. Man nennt α den Abbildungsgrad von f.)

(4 Punkte)