Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

# Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

**Blatt 5, Abgabe bis zum 20.05.2010 um 11:00 Uhr**

**Aufgabe 14** Sei $V$ ein endlichdimensionaler orientierter reeller Vektorraum und $g$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform.

1. Man konstruiere eine natürliche nicht ausgeartete Bilinearform auf $\Lambda^p V$ (man gehe wie im definiten Fall vor).
2. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine orientierte Basis. Man zeige, dass

   $$\omega = \sqrt{|det(e_i, e_j)|} e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$$

   nicht von der Wahl von $e_1, \ldots, e_n$ abhängt. Man berechne $< w, w >$.
3. Man benutze 1) und 2) um einen Sternoperator

   $$* : Alt^p(V) \to Alt^{n-p}(V)$$

   zu definieren.

(4 Punkte)

**Aufgabe 15** Wir versehen $\mathbb{R}^4$ mit der Bilinearform $g(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$. Sei $M \subset \mathbb{R}^4$ ein offener Teil mit $(x_0, 0, 0, x_3) \notin M$. Die Bilinearform $g$ induziert dann einen Operator $* : A^p(M) \to A^{4-p}(M)$. Man betrachte

$$\omega = \frac{x_1 dx_1 \wedge dx_3 + x_2 dx_2 \wedge dx_3}{x_1^2 + x_2^2}$$

auf $M$ und zeige

$$d\omega = 0 \text{ und } d(*\omega) = 0.$$

Bemerkung: Diese Lösung der Maxwellschen Gleichungen $d\omega = 0$ und $d(*\omega) = 0$ beschreibt das von einem entlang der $x_3$-Achse fließenden Strom erzeugte Magnetfeld.

(4 Punkte)

**Aufgabe 16** Sei $S^1$ die Einheitskreislinie und $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, $\pi(t) = e^{2\pi i t}$. Wir wissen, dass $\pi$ einen Isomorphismus $T_a\mathbb{R} \to T_a S^1$ induziert. Das Euklidsche Skalarprodukt $g(a, b) = ab$ induziert eine Riemannsche Metrik auf $S^1$. Man berechne die Volumenform $\omega$ und berechne

$$\int_{S^1} \omega.$$

(Die Volumenform einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit $(X, g)$ ordnet jedem $a \in X$ das ausgezeichnete Element $\omega_a \in Alt^n(T_a X)$ zu)

(4 Punkte)