Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 4, Abgabe bis zum 14.05.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 12 Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gitter, falls eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ existiert mit $L = \mathbb{Z}e_1 + \ldots \mathbb{Z}e_n$. Der Quotient $X = \mathbb{R}^n/L$ ist der n-dimensionale Torus. Als Menge ist dies einfach die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in L$. Sei $\pi : \mathbb{R}^n \to X$ die natürliche Projektion. Man versehe X mit der Quotiententopologie: Eine Teilmenge $V \subset X$ ist offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(V)$ ist offen .

(i) Zeige: X ist ein kompakter topologischer Raum.

(ii) Man konstruiere auf X eine Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit, so dass π eine differenzierbare Abbildung ist.

(iii) Zeige: Die Abbildung $T_a\pi : T_a\mathbb{R}^n \to T_{\pi(a)}X$ ist für alle $a \in \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus.

(iv) Man konstruiere eine Riemannsche Metrik auf X, so dass $T_a\pi$ eine Isometrie ist, wobei $T_a\mathbb{R}^n$ mit der üblichen euklidschen Metrik versehen ist.

(v) Man zeige, dass die Elemente aus $A^p(X)$ umkehrbar eindeutig den Elementen aus $A^p(\mathbb{R}^n)$ entsprechen, deren Komponenten periodisch bezüglich L sind.

(10 Punkte)

Aufgabe 13 Sei (D, g) ein Riemannsches Gebiet. Der Laplace-Beltrami Operator Δ hat auf Funktionen (Nullformen) die explizite Darstellung

$$\Delta f = \frac{1}{det\ g} \sum_{ij} \partial_i(\sqrt{det\ g}\ g^{ij})\partial_j f.$$

Man zeige dies im einfachsten Fall $n = 1$.

(4 Punkte)