Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 2, Abgabe bis zum 29.04.2010 um 11:00 Uhr (?)

Aufgabe 5 Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Jede lineare Abbildung $A : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ mit der Derivationseigenschaft läßt sich eindeutig zu einem Vektorfeld (also einer Familie $A_U : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$) ausdehnen.

(4 Punkte)

Aufgabe 6 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ eine C^∞-Abbildung. Sei

$$X = \{x \in U \mid f(x) = 0\}.$$

Wir nehmen an, dass die Funktionalmatrix $J(f, a)$ in jedem Punkt $a \in X$ den vollen Rang $n - d$ besitzt. Für $a \in X$ betrachte man den Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^n$, welcher von den Zeilen von $J(f, a)$ erzeugt wird. Welche geometrische Bedeutung hat W?

(4 Punkte)

Aufgabe 7 Seien A, B zwei Vektorfelder, aufgefaßt als Derivationen. Man zeige, dass auch $[A, B] = A \circ B - B \circ A$ ein Vektorfeld ist. Berechne als Beispiel diese *Lieklammer* für die Vektorfelder

$$A = \sum_{v=1}^{n} f_v \frac{\partial}{\partial x_v},\ B = \sum_{v=1}^{n} g_v \frac{\partial}{\partial x_v}.$$

Welche klassische Bedeutung hat das Ergebnis?

(4 Punkte)

Aufgabe 8 Man definiert die äußere Ableitung

$$d : A^p(U) \to A^{p+1}(U),\ U \subset \mathbb{R}^n\ offen,$$

durch die Formel

$$d(\sum_a f_a dx_a) = \sum_a (df_a) \wedge dx_a,\ dx_a = dx_{a_1} \wedge \ldots \wedge dx_{a_p}.$$

Man zeige, dass allgemeiner die Formel

$$\begin{aligned}(d\omega)(A_1, \ldots, A_{p+1}) = &\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} A_i \omega(A_1, \ldots, \hat{A}_i, \ldots A_{p+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([A_i, A_j], A_1, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, \hat{A}_j, \ldots A_{p+1})\end{aligned}$$

gilt. Tipp: Man stütze sich auf Lemma 4.1 aus dem Skript. Es kommt darauf an, die C^∞-Multilinearität zu zeigen.

(4 Punkte)