Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

Blatt 1, Abgabe bis zum 22.04.2010 um 11:00 Uhr (?)

Aufgabe 1 Sei U eine offene Teilmenge eines Raumes X. Setzt man eine stetige Funktion mit kompaktem Träger $f : U \to \mathbb{R}$ auf X durch Null fort, so erhält man eine stetige Funktion mit kompaktem Träger auf X. Zeige, dass man so eine Einbettung $C_c(U) \to C_c(X)$ erhält. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so erhält man entsprechend $C_c^\infty(U) \to C_c^\infty(X)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2 Sei U eine offene Teilmenge einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und sei $V \subset U$ ein offener Teil, dessen in X gebildeter Abschluß $\overline{V}$ ganz in U enthalten und kompakt ist. Man zeige, dass jede Funktion $f \in C^\infty(X)$, welche auf U verschwindet, als Produkt $f = gh$ von zwei Funktionen $g, h \in C^\infty(X)$ geschrieben werden kann, welche beide auf V verschwinden.

(4 Punkte)

Aufgabe 3 Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $a \in X$. Gegeben sei eine lineare Abbildung $D : C^\infty(X) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$D(fg) = f(a)D(g) + g(a)D(f).$$

Seien $f, g \in C^\infty(X)$, welche in einer Umgebung von a übereinstimmen. Dann gilt $D(f) = D(g)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4 Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $a \in X$. Gegeben sei eine lineare Abbildung $D : C^\infty(X) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$D(fg) = f(a)D(g) + g(a)D(f).$$

Man zeige, dass man D eindeutig zu einem Element aus $T_a(X)$ (also zu einer Familie $D_U : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$) ausdehnen kann.

(4 Punkte)

Résumé: Will man den Tangentialraum $T_a(X)$ definieren, so genügt es, lineare Abbildungen $C^\infty(X) \to \mathbb{R}$ mit der Derivationseigenschaft zu betrachten. Nachteil: Mit dieser Definition sieht man nicht sofort, dass $T_a(U) \simeq T_a(X)$ für $a \in U$ gilt.

Ein organisatorischer Hinweis: Wir werden jede Woche am Donnerstag ein Übungsblatt ausgeben. Bis jetzt wissen wir aber noch nicht, ob wir einen Tutor genehmigt bekommen. Falls nicht, erübrigt sich natürlich die Abgabe am nächsten Donnerstag. Sollten wir den Tutor genehmigt bekommen, so würde die erste Übungsgruppe am Montag, dem 26.04, von 16-18 Uhr in HS 4 (INF 288) stattfinden.