

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg  
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

## Übungen zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten SS 2010

### Wiederholungsfragen und Stichpunkte

Was ist eine Karte?  
Was ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit?  
Was bedeutet “reell” bzw. “komplex” differenzierbar (CR-DGL)?  
Was ist eine komplexe Mannigfaltigkeit?  
Beispiele komplexer Mannigfaltigkeiten (Tori,  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ )  
Was ist der Tangentialraum, Eigenschaften  
Was ist ein kovarianter Tensor?  
Was ist eine Differentialform?  
Was ist die Graßmannalgebra?  
Ableiten von Differentialformen  
De-Rham-Komplex, Poincare-Lemma  
 $H^n(X, \mathbb{R}) \neq 0$  für  $X$  kompakt orientierbar  
Riemannsche Metriken, lokale Darstellung  
Volumenform einer Riemannschen Mfk  
Sternoperator, insbesondere  $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$   
Kobleitung  $d^*$ , Adjungiertheit  
Laplace-Beltrami-Operator  
Was ist eine harmonische Form, Hauptsatz der reellen Hodgetheorie  
Hodgetheorie des Torus  
Was sagt die Poincare-Dualität?  
Formen vom Typ  $(p, q)$  auf komplexen Mannigfaltigkeiten  
Dolbeault-Komplex und Dolbeault-Kohomologie  
Hodgezahlen  
Holomorphe Differentialformen, Zusammenhang mit Dolbeault-Kohomologie  
Hermitesche Metriken  
Sternoperator für hermitesche Mfk, insbesondere  $* : A^{p,q} \rightarrow A^{n-q,n-p}$   
Kobleitung  $\partial^*$ ,  $\bar{\partial}^*$ , Adjungiertheit  
Komplexer Laplaceoperator  $\bar{\square}$ , Hauptsatz der komplexen Hodgetheorie  
Hodgetheorie des komplexen Torus

Hermitesche Metriken und ihre assoziierte Fundamentalform  $\Omega$ , auch Koordinatendarstellung

Der Begriff Kählermannigfaltigkeit

Beispiele dafür: Tori,  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$

Kählerrelationen (nur das Prinzip) und die Folgerung  $\Delta = 2\Box = 2\bar{\Box}$

Hodgezerlegung  $H^m(X, \mathbb{C}) = \bigoplus H^{p,q}(X)$

Was ist ein elliptischer Differentialoperator (für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen)

Hauptsatz über elliptische Differentialoperatoren für kompaktes hermitesches  $(X, g)$ :  $C^\infty(X) = \ker(A) \oplus \text{bild}(A^*)$  mit endlichdimensionalem Kern