Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Vortragsbeschreibung Seminar Analysis SS 2010

vorläufige Version

Die Hodgetheorie charakterisiert die De-Rham Kohomologiegruppen einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit mittels der Theorie des Laplaceoperators. Grundlegend für die ganze Theorie ist folgender tiefe Satz:

Sei $A : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ *ein elliptischer Operator auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dann ist der Kern von* A *endlichdimensional und es gilt* $C^\infty(X) = ker(A) \oplus im(A^*)$.

Dieser Satz wird in der Vorlesung bewiesen werden. Das Seminar behandelt die funktionalanalytischen Hintergründe. Insbesondere soll der Satz von Schwartz für Frécheträume bewiesen werden.

Die einzelnen Vorträge werden knapp im Anhang des Skriptes [Fre] beschrieben. Im folgenden einige Details.

Vortrag 1 Folgenkompakte metrische Raeume sind kompakt, der Bairesche Kategoriensatz.

Der Beweis zur Folgenkompaktheit steht im Skript. Der Bairesche Kategoriensatz steht auch zum Beispiel in [HS91] oder [Rud91].

Vortrag 2 Hilbertraum, orthogonales Komplement eines abgeschlossenen Unterraums, Hilbertraumbasis

Hier kann man sich an den Anhang des Skripts halten. Wahrscheinlich hat man nicht genug Zeit, um alle dort angegeben Sätze zu beweisen. Man gebe aber einen Beweis des Rieszschen Satzes. Eine mögliche Quelle ist [Rie]. Die Äquivalenz der Separabilitätsbedingungen kann man glauben. Die Isomorphie jedes separablen Hilbertraumes zu dem l^2 sollte aber erklärt werden, siehe etwa [Wer07]. Die dort benutzten Charakterisierungen von Basen können aus Zeitmangel aber wohl nicht bewiesen werden.

Vortrag 3 Normierte Räume, Banachräume, Endlichdimensionale normierte Räume, Dual eines Banachraums, Hahn Banach, die Einbettung ins Doppeldual.

Hier kann man nach dem Skript oder [HS91] vorgehen. Falls man sich an letzterem orientiert: Man springe nach der Definition direkt zu Paragraph 6 und trage diesen bis Satz 6.5 vor. Diese Formulierung von Hahn-Banach ist der im Skript zu bevorzugen, weil sie sich nicht auf normierte Räume beschränkt. Beispielsweise kann man den Satz von Hahn-Banach für Frécheträume auf diese Version zurückführen. Dann kann man mit Paragraph 7 beginnen (Dualraum) und beweise Lemma 7.6 (die Einbettung in das Bidual). Wir nennen den Abschluß des normierten Raumes in seinem Dual die Vervollständigung des Raumes. Ferner brauchen wir noch folgendes Lemma: Ein normierter Raum ist endlichdimensional genau dann wenn die Einheitskugel kompakt ist. Das steht u.a. in [MV92].

Vortrag 4 Frécheträume, Stabilität under Summe, Quotient, Dual, Hahn Banach fuer Frécheträume. Beispiele fuer Frécheträume

Neben dem Skript kann man sich an [Rud91], [Tre67], [MV92] oder [Wer07] orientieren. Dort werden auch die im Skript aufgeführten Beispiele diskutiert. Die im Skript aufgeführten Resultate über holomorphe Funktionen können geglaubt werden. Zum Satz von Hahn-Banach: Diesen kann man zum Beispiel auf die in Vortrag 3 angegebene Version zurückführen, wie in [Wer07] beschrieben. Eine andere Quelle ist [Rud91]. Dieser Vortrag kann etwas länger als eine Sitzung sein.

Vortrag 5 Open Mapping theorem und Anwendungen, beschraenkte Mengen in Frechetrauemen, der Begriff des Montelraums, Beispiele

Ein Beweis des Theorems steht u.a. im Anhang von [GR09], in [MV92] oder in [Rud91]. Die beschränkten Mengen werden in [Rud91] diskutiert. Siehe auch [Sch84]. Um zu zeigen, dass $C^\infty(U)$ ein Montelraum ist, benötigt man den Satz von Arzela-Ascoli. Dieser steht zum Beispiel in [Rud91] (oder in jedem anderen Buch über Funktionalanalysis). In [Rud91] wird auch bewiesen, dass $C^\infty(U)$ und $O(U)$ Montelräume sind. Für $C^\infty(U)$ benötigt man neben Arzela-Ascoli noch die Charakterisierung der beschränkten Mengen wie in Thm. 1.37. Für $O(U)$ ssollte man einfach wie im Skript argumentieren und das benötigte Resultat aus der Funktionentheorie glauben. Auch dieser Vortrag ist vermutlich etwas länger als eine Sitzung.

Vortrag 6 Distributionen - algebraisch

Das ist der "Elementary Calculus"-Teil aus dem Skript. Man motiviere insbesonder die Definitionen gut. Als Orientierung ist der Wikipedia-Artikel nützlich, vielleicht auch [Gar]. Andere Quellen zu Distributionen sind unter anderem [Rud91] oder [Wer07].

Vortrag 7 Distributionen - topologisch

Das ist der zweite Teil zu den Distributionen aus dem Skript. Hier muß die Topologie der Räume $D(U)$, $D(U)'$, $E(U)$ und $E(U)'$ diskutiert werden. Für die beiden Teile ist insbesondere das Buch von Schwartz [Sch84] zu empfehlen. Nützlich sind auch [Rud91], [MV92] und [Wer07] (etwa VIII.3).

Vortrag 8 Kompakte Operatoren und der Satz von Schwartz für Banachräume

Siehe auch [GR09]. Das Skript wird hier noch ausführlicher werden.

Vortrag 9 Der Satz von Schwartz für Frécheträume

In diesem Vortrag soll der Satz von Schwartz mittels des "projektiven Limes" auf den Banachraumfall zurückgeführt werden. Weitere Informationen zum projektiven Limes findet man u.a. in [MV92]. Zum Beweis des Satzes siehe insbeondere den Anhang von [GR09]. Das Skript wird hier noch ausführlicher werden.

Vortrag 11 Der Hauptsatz.

Siehe Skript.

Literatur

[Fre] Eberhard Freitag. Lecture on Hodge theory.

[Gar] Paul Garrett. *Dangerous and Illegal Operations in Calculus.* `http://www.math.umn.edu/~garrett/m/fun/dangerous_and_illegal.pdf`.

[GR09] Robert C. Gunning and Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables. Reprint of the 1965 original.* Providence, RI: AMS Chelsea Publishing. xii, 317 p. , 2009.

[HS91] Friedrich Hirzebruch and Winfried Scharlau. *Introduction to functional analysis. (Einführung in die Funktionalanalysis.) Unveränd. Nachdr. der 1. Aufl. 1971.* BI-Hochschultaschenbücher. 296. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag. 178 S. , 1991.

[MV92] Reinhold Meise and Dietmar Vogt. *Introduction to functional analysis. (Einführung in die Funktionalanalysis.).* Vieweg Studium. 62, Aufbaukurs Mathematik. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. ix, 416 S. , 1992.

[Rie] *Riesz Representation Theorem.* `http://nfist.pt/~edgarc/wiki/index.php/Riesz_representation_theorem`.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional analysis. 2nd ed.* International Series in Pure and Applied Mathematics. New York, NY: McGraw-Hill. xviii, 424 p. , 1991.

[Sch84] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions. Nouv. éd., entièrement corr., ref. + augm. (Nouv. tirage).* Paris: Hermann. 436 p. , 1984.

[Tre67] François Treves. *Topological vector spaces, distributions and kernels.* New York-London: Academic Press 1967. XVI, 565 p. , 1967.

[Wer07] Dirk Werner. *Functional analysis. (Funktionalanalysis.) 6th corrected ed.* Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. xiii, 531 p. , 2007.