Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 13, Abgabe bis zum 29.01.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 46 Betrachte die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(x,y) = (x,y,xy)$. Man berechne das Integral

$$\int_{x^2+y^2<1} \varphi^*\omega$$

für $\omega = x\ dx \wedge dz - y\ dy \wedge dz$.

(4 Punkte)

Aufgabe 47 Man berechne das Integral

$$\int_{x^2+y^2<1} dw$$

für die Differentialform $\omega = x\ dy$ auf dem $\mathbb{R}^2$. Man berechne ferner das Integral

$$\int_{(0,2\pi)} \alpha^*\omega$$

für die Kurve $\alpha : (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2,\ \alpha(t) = (cos(t), sin(t))$.

(4 Punkte)

Aufgabe 48 Eine Differentialform ω auf einem offenen Teil $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt exakt, falls sie sich in der Form $\omega = d\eta$ schreiben läßt. Wegen $d \circ d = 0$ sind exakte Formen immer geschlossen ($dw = 0$).

(a) Wir nehmen an, dass jede geschlossene Form auf U exakt ist. Man zeige, dass dies dann auch für jede zu U diffeomorphe Teilmenge V gilt.

(b) Sei U beliebig. Ist α eine geschlossene und β eine exakte Differentialform, so ist $\alpha \wedge \beta$ exakt.

(3+2 = 5 Punkte)

Aufgabe 49 Man untersuche, ob die auf $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ definierte Form

$$\omega = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2 + y^2}$$

geschlossen und/oder exakt ist.

(4 Punkte)