Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 12, Abgabe bis zum 22.01.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 42 Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall (die Zeit) und $U = I \times V$. Die Koordinaten schreiben wir in der Form $(t, x) = (t, x_1, x_2, x_3)$. Man zeige: Jedes $\omega \in A^r(U)$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$\omega = \omega_1 \wedge dt + \omega_2,\ \omega_1 \in A^{r-1}(U),\ \omega_2 \in A^r(U),$$

wobei ω_1 und ω_2 keinen dt-Term enthalten. Man übersetze die Gleichung $dw = 0$ in Gleichungen für ω_1 und ω_2.

Im Fall $r = 2$ haben die Formen ω_1 und ω_2 3 Komponenten (f_1, f_2, f_3) bzw. (g_1, g_2, g_3), welche von t und x abhängen. Dito im Fall $r = 3$ für ω_1. Bei festgehaltenem t kann man sie als Vektorfelder auf V auffassen und insbesondere die Operatoren rot und div auf sie anwenden.

Übersetze die homogene Gleichung $dw = 0$ ($\omega \in A^2(U)$) in eine Differentialgleichung für die Vektorfelder f und g, die die Formen w_1 und w_2 beschreiben. Allgemeiner: Wie übersetzt sich die inhomogene Gleichung $d\omega = \eta$, wenn man $\eta = \eta_2 \wedge dt + \eta_3 \ \in A^3(U)$ mittels des zu η_2 gehörigen Vektorfelds $j = (j_1, j_2, j_3)$ und der zu η_3 gehörigen Funktion ρ beschreibt?

(6 Punkte)

Aufgabe 43 Man betrachte die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad F \quad} & \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) & \longrightarrow & (x, y) := (\ r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi\ ) \end{array}$$

Man berechne für zwei unendlich oft differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die zurückgezogene Form $F^*(\ f\,dx + g\,dy\ )$. Was ist $F^*(\ dx \wedge dy\ )$?

(4 Punkte)

Aufgabe 44 Es seien $f_1, \ldots, f_m$ unendlich oft differenzierbare Funktionen auf einem offenen Teil $U \subset \mathbb{R}^n$. (a) Man berechne $d(f_1 \wedge df_2 \wedge df_3 \wedge \ldots \wedge df_m)$.

(b) Die Differentialformen ω und η seien geschlossen. Man zeige, dass dann $\omega \wedge \eta$ geschlossen ist.

(c) Man zeige: $df_1 \wedge \ldots \wedge df_m$ ist stets geschlossen.

(2+1+1 = 4 Punkte)

Aufgabe 45 Man berechne die Ableitung der Differentialform

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \; dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

Hierbei bedeutet $\widehat{\ }$, dass der entsprechende Faktor wegzulassen ist.

(4 Punkte)