Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 10, Abgabe bis zum 08.01.2010 um 11:00 Uhr

Aufgabe 34 Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine offene konvexe Teilmenge und $A : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der Gaußsche Integralsatz für Dreiecksflächen besagt, dass für je drei Punkte $a, b, c \in D$ bei richtiger Orientierung die Formel

$$\int_{\partial\Delta} A = \int_{\Delta} rot(A)$$

gilt; dabei sei Δ die Dreiecksfläche mit den Endpunkten a, b, c und

$$\int_{\partial\Delta} A := \int_a^b A + \int_b^c A + \int_c^a A.$$

Dies darf im folgenden verwendet werden.

Man zeige, dass unter der Annahme $rot(A) = 0$ eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$A = grad(f)$$

gilt.

Anleitung: Man wähle einen festen Punkt $a \in D$ und definiere $f(x)$, indem man A längs der Verbindungsstrecke zwischen a und x integriert. Man zeige zunächst $grad(f)(a) = A(a)$ und führe den allgemeinen Fall mittels des obigen Satzes hierauf zurück.

(4 Punkte)

Aufgabe 35 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Mit $\mathrm{Mult}(V^n, \mathbb{R})$ werde die Menge aller multilinearen Abbildungen $V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$ und mit $Alt(V^n, \mathbb{R})$ die Teilmenge aller alternierenden Abbildungen bezeichnet.

(a) Man beweise, dass durch

$$a : Mult(V^n, \mathbb{R}) \to Alt(V^n, \mathbb{R}), \quad M \mapsto M^a$$
$$M^a(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) M(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

eine surjektive Abbildung definiert wird.

(b) Wir setzen $V^{[p]} = Alt(V^p, \mathbb{R})$ und

$$V^{[p]} \times V^{[q]} \to V^{[p+q]}, \quad (M, N) \mapsto (MN)^a.$$

Man zeige, dass dadurch eine Graßmannalgebra (über $V[1] = V^*$) definiert wird. Man folgere, dass es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Graßmannalgebra $(V^\bullet, \wedge)$ mit $dim(V^{[1]}) = m$ gibt.

(3+3 = 6 Punkte)

Aufgabe 36 Sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Man zeige, dass die Abbildung

$$A^{[2]} : \Lambda^2\mathbb{R}^3 \to \Lambda^2\mathbb{R}^3$$

durch die 2×2-Unterdeterminanten von A gegeben ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 37 Man berechne die Fouriertransformierte der Funktion $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Man folgere, dass die in Aufgabe 33 definierte Konstante C gleich 1 ist. Man fasse noch einmal kurz zusammen, wie daraus der Fouriersche Umkehrsatz folgt.

Bemerkung: Dieser Beweis funktioniert mit leichten Modifikationen auch für $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

(4 Punkte)

Wir wünschen schöne Ferien und ein gutes neues Jahr!