Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 9, Abgabe bis zum 18.12.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 30 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ein offener Teil und $A : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Man definiert

$$div(A) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3},$$
$$rot(A) = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right).$$

Sei ferner $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Man zeige, dass für zweimal stetig differenzierbares f und A die folgenden Identitäten gelten:

1. $div(rot(A)) = 0.$
2. $rot(grad(f)) = 0,$
3. $(rot(rot(A)) = grad(div(A)) - \Delta(A).$

Hierbei ist der Laplaceoperator Δ in (3) komponentenweise auf A anzuwenden.

(6 Punkte)

Aufgabe 31 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene besagt folgendes: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte offene Teilmenge mit glattem Rand ∂U. Sei $W \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge, welche $U \cup \partial U$ umfaßt und $A : W \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt (bei geeigneter Orientierung des Randes)

$$\int_U \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial U} A.$$

Dabei ist $\int_{\partial U} A$ über das Kurvenintegral

$$\int_0^1 < A(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) > dt \quad (\alpha : (0,1) \to \mathbb{R}^2)$$

definiert. Man zeige, dass die obige Formel aus dem in der Vorlesung angegeben Gaußschen Integralsatz folgt.

(4 Punkte)

Aufgabe 32 Sei $A : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit den Eigenschaften

1. $rot(A) = 0$.
2. Die Komponenten A_1, A_2 von A sind in einer Umgebung von $(0,0)$ beschränkt.

Man zeige, dass das Kurvenintegral längs einer Kreislinie um $(0,0)$ verschwindet. Man gebe ein Vektorfeld an, dass (1) erfüllt, aber nicht (2).

(4 Punkte)

Aufgabe 33 Betrachte die linearen Abbildungen

$$L_1 : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad L_1(f) = f(0),$$
$$L_2 : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad L_2(f) = \hat{\hat{f}}(0).$$

Man zeige $Kern(L_1) \subset Kern(L_2)$. Man folgere $\hat{\hat{f}}(0) = Cf(0)$ mit einer für alle f gültigen Konstante C.

Hierbei darf ohne Beweis folgendes Lemma aus der Analysis 1 benutzt werden: Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$. Dann gibt es ein $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f(x) = xg(x)$. Aus $f \in S(\mathbb{R})$ folgt $g \in S(\mathbb{R})$. (Beweis: $g(x) = \int_0^1 f'(ux)du$)

(4 Punkte)