Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 8, Abgabe bis zum 11.12.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 26 Auf der n-Sphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots x_{n+1}^2 = 1\}$$

betrachten wir die Äquivalenzrelation $a \sim b \Leftrightarrow a = b$ oder $a = -b$. Wir definieren den projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ als die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / \sim$. Man zeige, dass durch

$$\tilde{d}([x],[y]) := min(d(x,y), d(x,-y))$$

eine Metrik auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ definiert wird. Dabei bezeichnet $d(x,y)$ die gewöhnliche euklidische Metrik.

(4 Punkte)

Aufgabe 27 Es sei $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ der projektive Raum und

$$X_i = \{[x] \in X \mid x_i \neq 0\}$$

für $i = 1, \ldots, n+1$. Zeige: Die X_i sind offene Teilmengen von X. Wir betrachten die Abbildungen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$:

$$\alpha_i : \mathbb{R}^n \to X_i,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left[\frac{(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n)}{\sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \right].$$

Man beweise, dass α_i topologisch ist, und dass durch $\{\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_{n+1}^{-1}\}$ ein differenzierbarer Atlas auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ gegeben ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 28 Sei A das Vektorfeld

$$A : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2,\ A(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right).$$

Man berechne das Integral von A längst der einmal durchlaufenen Einheitskreislinie.

(4 Punkte)

In den folgenden Aufgaben zur Fouriertransformation wollen wir den Fourierschen Umkehrsatz beweisen: *Sei $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$.* Um den Beweis übersichtlicher zu gestalten, beschränken wir uns auf den Fall $n = 1$. Der Beweis verallgemeinert sich aber ohne Probleme auf den Fall $f \in S(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 29 Man zeige: Für die Operatoren

$$(T_a f)(x) := f(x+a),\quad (U_a f)(x) := e^{2\pi i a x} f(x),\qquad a \in \mathbb{R}^*,\ f \in S(\mathbb{R}),$$

gilt

$$\widehat{T_a f}(x) = (U_a \hat{f})(x),\quad \widehat{U_a f}(x) = (T_{-a}\hat{f})(x).$$

Man folgere $\widehat{\widehat{T_a f}} = T_{-a}\hat{\hat{f}}$ und hieraus: Gilt $\hat{\hat{f}}(0) = f(0)$ für alle $f \in S(\mathbb{R})$, so gilt

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Folgerung: Für den Fourierschen Umkehrsatz genügt es, $\hat{\hat{f}}(0) = f(0)$ zu beweisen.

(4 Punkte)