Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 7, Abgabe bis zum 04.12.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 22 Man betrachte die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ \alpha(x,y) := (cos(x), sin(x), cos(y), sin(y)).$$

Das Bild von α sei X.

(a) Man zeige $\alpha(Q) = X$ für $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

(b) Wann haben zwei Punkte aus Q denselben Bildpunkt?

(c) Sei $Q_0 = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ und $X_0 = \alpha(Q_0)$. Man zeige, dass α eine reguläre Parametrisierung $Q_0 \to X_0$ induziert. (Es ist nicht ganz klar, dass die Umkehrabbildung dieser Abbildung stetig ist. Auf diesen Beweis darf verzichtet werden)

(d) X ist eine eingebettete 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^4$.

(e) Man berechne die Matrix $g(x) = J(\alpha, x)^T J(\alpha, x)$.

(f) Man berechne das Volumen $v_2(X)$. Man darf dabei $v_2(X) = v_2(X_0)$ benutzen.

Bemerkung: (X, g) ist ein sogenannter flacher Torus.

($\sum_{i=1}^{6} 1 = 6$ Punkte)

Aufgabe 23 Gibt es auf jeder nichtleeren differenzierbaren Mannigfaltigkeit M eine nichtkonstante differenzierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$?

(4 Punkte)

Aufgabe 24 Sei $t > 0$. Man berechne die Oberfläche des durch $|z| < t$ begrenzten Bereiches des Rotationshyberboloids, welches durch die Gleichung

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

bestimmt ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 25 Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Wir definieren $\mathcal{M}(f)$ durch $(\mathcal{M}f)(x) := x \cdot f(x)$. Man zeige

$$(a)\ \mathcal{F}(f') = 2\pi i\ \mathcal{M}(\mathcal{F}(f)),$$
$$(b)\ \mathcal{F}(f)' = -2\pi i\ \mathcal{F}(\mathcal{M}(f)).$$

Anmerkung: Diese Aufgabe verallgemeinert sich natürlich leicht auf f in $S(\mathbb{R}^n)$.

(2+2 = 4 Punkte)