Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 6, Abgabe bis zum 27.11.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 18 Man berechne die Oberfläche der Kugel

$$K_r := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\}, \quad r > 0.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 19 Sei S eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Die zugeordnete quadratische Form

$$S[x] := x^T S x = \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{ij} x_i x_j, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

sei positiv definit. Man zeige, dass

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid S[x] = C\}, \quad C > 0,$$

eine $(n-1)$-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 20 Sei S wie in Aufgabe 19. (a) Bestimme den Tangentialraum von $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid S[x] = 1\}$ im Punkt $a \in X$.

(b) Der geometrische Tangentialraum $T_a^{geo} X$ in $a \in X$ besteht aus allen Punkten $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $(x - a) \in T_a X$. Man zeige

$$T_a^{geo} X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T S x = 1\}.$$

(2+2 = 4 Punkte)

Aufgabe 21 Für zwei Funktionen $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ definiert man ihre Faltung $(f * g)(x)$ durch

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

(a) Zeige, dass $(f * g)(x)$ in $S(\mathbb{R}^n)$ liegt.

(b) Man zeige

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad \text{und } \mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

(2+4 = 6 Punkte)