Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 4, Abgabe bis zum 13.11.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 11 Die Funktion f sei auf $(-1,1)^2$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

(a) Zeige, dass f meßbar ist.

(b) Berechne

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y) dx \right) dy \text{ und } J = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y) dy \right) dx.$$

(c) Ist f integrierbar über $(-1,1)^2$?

(1+2+2 = 5 Punkte)

Aufgabe 12 Definiere eine Folge von Mengen $C_n \subseteq [0,1]$ durch

$$C_0 = [0,1],\ C_{n+1} = \{\frac{x}{3} \mid x \in C_n\} \cup \{\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \mid x \in C_n\}.$$

Der Durchschnitt aller C_n sei $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Zeige, dass C eine Nullmenge ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 13 Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

(a) Man zeige, dass dann die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x^2 + y^2)$ integrierbar ist und dass

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy = \pi \int_0^\infty f(z) dz$$

gilt.

(b) Man wende (a) im Spezialfall $f(r) = e^{-r}$ an. Folgere, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$$

(4+2 = 6 Punkte)

Aufgabe 14 Zeige: Ist U eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, so ist für jede Nullmenge $N \subseteq U$ auch das Bild $\varphi(N) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge.

(4 Punkte)