Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 3, Abgabe bis zum 6.11.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 7 Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{sin(x)}{x}$, ist bekanntlich uneigentlich Regel-integrierbar. Ist sie Lebesgue-integrierbar?

(3 Punkte)

Aufgabe 8 Sei $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ die charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$ eingeschränkt auf das Intervall $[0, 1]$.

(a) Zeige, dass f nicht Regel-integrierbar ist.

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, gilt das Gleiche für $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Wir fixieren eine solche Abzählung $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = (q_n)$. Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion f_n auf $[0, 1]$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\} \\ 0 \text{ sonst .} \end{cases}$$

(b) Zeige: Jedes der f_n ist Regel-integrierbar und berechne

$$\int_0^1 f_n(x)dx.$$

(c) Zeige, dass die Folge (f_n) gegen f auf $[0, 1]$ konvergiert. Was kann man schließen?

(d) Zeige, dass f (Lebesgue-) integrierbar ist und dass man den Satz von Lebesgue anwenden kann.

(2+1+2+2 = 7 Punkte)

Aufgabe 9 Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ für } x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar ist und bestimme den Wert des Integrals.

(4 Punkte)

Aufgabe 10* (freiwillige Zusatzaufgabe) Man beweise die Identität

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Hierbei ist $x^x := 1$ für $x = 0$.

(4 Punkte)