Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III WS 2009

Blatt 2, Abgabe bis zum 30.10.2009 um 11:00 Uhr

Aufgabe 5 Sei E der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ versehen mit der Norm $||f||_1 := \int_0^1 |f(t)|dt$.

(a) Die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ seien für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

definiert. Zeige, dass (f_n) eine Cauchyfolge in $(E, ||.||_1)$ ist.

(b) Zeige, dass es keine stetige Funktion auf $[0,1]$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$. Nehme dazu zum Beispiel an, dass ein $f \in E$ mit $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$ existieren würde und zeige

$$\int_0^{\frac{1}{M^2}} |f_n(x) - f(x)|dx \geq \frac{1}{M} - \frac{1}{n}$$

für $M := sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ und $n \geq M$.

(c) Man zeige, dass die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf dem Intervall $[0,1]$ Lebesgue-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} ||g - f_n||_1 = 0.$$

(2+3+3 = 8 Punkte)

Aufgabe 6 Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Man zeige, dass

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in (a,b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar ist. Zeige ferner, dass $I(\tilde{f})$ mit dem uneigentlichen Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

im Sinne der gewöhnlichen reellen Analysis übereinstimmt.

(4 Punkte)