Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Einige mögliche/typische Klausuraufgaben

Zur Wertung bei den Ja-Nein-Fragen: Jedes richtige Kreuz gibt 2 Punkte, jedes falsche Kreuz gibt -2 Punkte. Als Enthaltung (0 Punkte) zählt entweder (a) keine Kreuze oder (b) beide Kreuze. In der Addition aller Ja-Nein-Punkte kann man aber im schlechtesten Fall 0 Punkte erreichen.

Ja-Nein-Fragen

(1) $\mathbb{R}$ sei mit dem üblichen Maß versehen. Jede abzählbare Teilmenge ist eine Nullmenge.

JA ☐ ☐ NEIN

(2) $\mathbb{R}$ sei mit dem üblichen Maß versehen. Jede Nullmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist abzählbar.

JA ☐ ☐ NEIN

(3) Ist die Formel $\frac{d}{dt}\int_0^1 e^{-x^2 t} dt = -\int_0^1 x^2 e^{-x^2 t} dt$ richtig?

JA ☐ ☐ NEIN

(4) Ist der Rand einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ (versehen mit dem Standardmaß) immer eine Nullmenge?

JA ☐ ☐ NEIN

(5) Jede beschränkte stetige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einem beschränkten offenen Teil $U \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-integrierbar.

JA ☐ ☐ NEIN

(6) Sei X eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann existiert eine überall positive Volumenform.

JA ☐ ☐ NEIN

(7) Sei X eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ist jede Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ wieder orientierbar?

JA ☐ ☐ NEIN

(8) Sei X eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit, $U \subset X$ eine offene Teilmenge mit glattem Rand. Ist dann der Rand von U stets eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit?

JA ☐ ☐ NEIN

Aufgaben

Aufgabe 1 Sei (X, dx) ein Raum mit Radonmaß. Was besagt der Satz von Beppo-Levi?

Aufgabe 2 Was versteht man unter einem Radonmaß auf einem (etwa lokalkompakten metrischen) Raum?

Aufgabe 3 Sei (X, dx) ein Raum mit Radonmaß. Was ist eine Nullmenge?

Aufgabe 4 Was besagt die Transformationsformel für das Standardmaß im $\mathbb{R}^n$ (mit genauen Voraussetzungen)?

Aufgabe 5 Sei $\alpha : D \to X \subset \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) eine reguläre Parametrisierung einer eingebetteten Mannigfaltigkeit. Wie kann man das d-dimensionale Volumen berechnen? Es reicht, die Formel anzugeben.

Aufgabe 6 Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein stetiges Vektorfeld und $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Wie ist $\int_\alpha A$ definiert?

Aufgabe 7 (a) Sei

$$E := \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1 \ \}$$

der Einheitskreis. Man gebe eine explizite reguläre Parametrisierung für $E \setminus \{(1,0)\}$ an.

(b) Man berechne den Umfang des Kreises E an Hand der Parametrisierung aus (a).

Aufgabe 8 Was versteht man unter einer d–dimensionalen parametrisierbaren eingebetteten Mannigfaltigkeit $X \subseteq \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 9 Man berechne:

$$d(\ x_1 x_2 x_3 \ dx_1 \wedge dx_2 \ + \ x_1^2 x_2 \ dx_1 \wedge dx_3 \ ).$$

Aufgabe 10 Man gebe eine 1–Form ω auf $\mathbb{R}^2$ an, so dass gilt:

$$d\omega \;=\; x_2\, dx_1 \wedge dx_2.$$

Aufgabe 11 Man berechne:

$$(x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3) \;\wedge\; (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3).$$

Aufgabe 12 Man berechne $\varphi^*\omega$ für

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \;, \qquad \varphi(x_1, x_2) = (\; x_1 x_2 \;,\; x_1^2 \;,\; x_2^2 \;) \;, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

und

$$\omega \;=\; y_1^2\, dy_2 \wedge dy_3.$$

Aufgabe 13 Was versteht man unter einer Karte auf einem (metrischen) Raum?

Was ist eine topologische Mannigfaltigkeit?

Aufgabe 14 Was versteht man unter einem orientierten differenzierbaren Atlas?

Aufgabe 15 Sei ω eine überall positive Differentialform vom Grad n auf einer n-dimensionalen kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Man zeige, dass sich ω nicht in der Form $d\omega'$ schreiben läßt.

Aufgabe 16 Man will ein Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ längs einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^3$ integrieren. Wie sollte man zu A eine Differentialform ω zuordnen, so dass das Integral $\int_X \omega|_X$ dieses Integral realisiert?