Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lösungshinweise Blatt 8

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 42 Die erste Aussage gilt allgemeiner für irgendeine r-Form im $\mathbb{R}^n$. Wir benutzen die Notation $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_r}$ für $|I| = r$. In dieser Aufgabe ist $dx_0 = dt$. Sei $\omega = \sum_{|I|=r} f_I(x) dx_I$. Diese kann man dann wie gewünscht in der folgenden Weise aufspalten:

$$\omega = \omega_{r-1} \wedge dt + \omega_r$$

mit

$$\omega_{r-1} = (-1)^{r-1} \sum_{|I|=r, 0 \in I} \omega_I dx_{I-\{0\}}$$

und

$$\omega_r = \sum_{|I|=r, 0 \notin I} \omega_I dx_I.$$

Die entsprechenden Gleichungen für die inhomogene Gleichung lauten

$$j = rot(f) + \frac{\partial g}{\partial t} \text{ und } \rho = div(g)$$

und dementsprechend im homogenen Fall

$$rot(f) = -\frac{\partial g}{\partial t} \text{ und } div(g) = 0.$$

Aufgabe 43 Es ist

$$\begin{aligned}(F^*f)(r,\varphi) &:= (f\circ F)(r,\varphi) = f(F(r,\varphi)) = f(\ r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi\ )\ ,\\ (F^*dx)(r,\varphi) &:= (dF^*x)(r,\varphi) = d(x\circ F)(r,\varphi) = dx(\ r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi\ ) = d(r\cos\varphi)\\ &= \cos\varphi\ dr - r\sin\varphi\ d\varphi\end{aligned}$$

und dito für g und dy, also

$$\begin{aligned}(F^*(\ f\,dx + g\,dy\ ))(r,\varphi) &:= (F^*f)(F^*dx) + (F^*g)(F^*dy)(r,\varphi)\\ &= f(\ r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi\ )\ (\cos\varphi\ dr - r\sin\varphi\ d\varphi)\\ &\quad + g(\ r\cos\varphi\ ,\ r\sin\varphi\ )\ (\sin\varphi\ dr + r\cos\varphi\ d\varphi).\end{aligned}$$

Für die zweite Differentialform berechnet man

$$\begin{aligned}(F^*(\ dx\wedge dy\ ))(r,\varphi) &:= (F^*dx)\wedge(F^*dy)(r,\varphi)\\ &= (\cos\varphi\ dr - r\sin\varphi\ d\varphi)\wedge(\sin\varphi\ dr + r\cos\varphi\ d\varphi)\\ &= \ldots\cdot\underbrace{dr\wedge dr}_{=0} + r\cos^2\varphi\ dr\wedge d\varphi - r\sin^2\varphi\ \underbrace{d\varphi\wedge dr}_{=-dr\wedge d\varphi}\\ &\quad + \ldots\cdot\underbrace{d\varphi\wedge d\varphi}_{=0}\\ &= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\ dr\wedge d\varphi\\ &= r\ dr\wedge d\varphi\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 45 Für jeden Summanden berechnet man

$$\begin{aligned}&d(x_i\ dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_n)\\ &\quad = dx_i\ \wedge\ dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_n\\ &\quad := dx_i\ \wedge\ \underbrace{dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{i-1}}_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_n\\ &\quad = (-1)^{1\cdot(i-1)}dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{i-1}\ \wedge\ dx_i\ \wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_n.\end{aligned}$$

Nutzt man die Antikommutativität des alternierenden Produkts, so folgt

$$\begin{aligned}d\omega &= \sum_{1\le i\le n}(-1)^{i-1}x_i\ \cdot(-1)^{1\cdot(i-1)}\ dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\\ &= \sum_{1\le i\le n}\ dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\\ &= n\ dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.\end{aligned}$$

Bemerkung Diese Form entsteht wie folgt: Durch die Vorschrift

$$x \mapsto \omega_x, \ \omega_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) := det(x, v_1, \ldots, v_{n-1})$$

wird eine $(n-1)$-Form ω auf $\mathbb{R}^n$ definiert (man denke an die Identifizierung $\Lambda^k V = Alt^k(V^*)$). Diese hat die Darstellung

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \ dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

Die Form ω ist die Volumenform auf der Sphäre S^n, dh. es gilt

$$\int_{S^n} \omega = vol_n(S^n).$$