Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lï¿½sungshinweise Blatt 10

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlï¿½sungen verstanden werden!

Aufgabe 34 Wir gehen vor, wie in der Aufgabenstellung angegeben: Wir waehlen einen festen Punkt $a \in D$ und definieren eine Funktion f (die dann $grad(f) = A$ erfuellen soll), indem man A laengs der Verbindungsstrecke zwischen a und x integriert.

Sei $a \in D$ ein fester Punkt. Für alle $x \in D$ ist die Verbindungsstrecke durch

$$\alpha_x : [0,1] \to D\ , \qquad \alpha_x(t) := a + t(x-a)$$

gegeben. Das Bild liegt in D, da D konvex ist.

Wie oben definieren wir nun f durch

$$f(x) \ := \ \int_a^x A \ := \ \int_{\alpha_x} A \ = \ \int_0^1 A(a + t(x-a)) \cdot (x-a)\, dt.$$

Man mache sich klar, dass der Ausdruck unter dem Integral tatsaechlich integrierbar ist.

Sei x_0 ein fester Punkt. Wir zeigen, dass die lineare Abbildung $A(x_0)\cdot$ das Differenzial von f in x_0 ist, dh.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x_0) \cdot (x - x_0)}{\parallel x - x_0 \parallel} = 0\ .$$

und damit

$$grad(f) = A.$$

Wir muessen nun zuerst einen schoenen Ausdruck fuer den Zaehler $f(x) - f(x_0) - A(x_0) \cdot (x - x_0)$ finden. Dazu benutzen wir den Gausschen Integralsatz.

$$
\begin{aligned}
& f(x) - f(x_0) - A(x_0) \cdot (x - x_0) \\
&= \int_a^x A + \int_{x_0}^a A - A(x_0) \cdot (x - x_0) \\
&= - \int_x^{x_0} -A(x_0) \cdot (x - x_0) \\
&= \int_0^1 A(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) \; dt - A(x_0) \cdot (x - x_0) \\
&= \int_0^1 A(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) \; dt - \int_0^1 A(x_0) \cdot (x - x_0) \; dt \\
&= \int_0^1 (\; A(x_0 + t(x - x_0)) - A(x_0) \;) \cdot (x - x_0) \; dt
\end{aligned}
$$

Um zu zeigen, dass der obige Grenzwert gegen Null geht, muessen wir den gerade erhaltenen Ausdruck (also den Zaehler) abschaetzen.

Sei x_0 fest und K eine genuegend kleine kompakte Umgebung um x_0, so dass A dort die Taylorentwicklung

$$A(y) = A(x_0) + J(A; x_0)(y - x_0) + R_{x_0}(y), \;\; y \in K,$$

mit dem Restglied R_{x_0} besitzt. Also

$$\lim \|A(y) - A(x_0)\| \; / \; \|y - x_0\| = \|J(A; x_0)\| < \infty.$$

Also ist die Funktion

$$y \mapsto \|A(y) - A(x_0)\| \; / \; \|y - x_0\|$$

auf dem Kompaktum K beschraenkt.

Sei C eine obere Schranke. Dann gilt fuer alle $x \in K$:

$$
\begin{aligned}
&\| \ f(x) - f(x_0) - A(x_0) \cdot (x - x_0) \ \| \\
&= \left\| \ \int_0^1 (\ A(x_0 + t(x - x_0)) - A(x_0) \ ) \cdot (x - x_0) \ dt \ \right\| \\
&\leq \int_0^1 \| \ (\ A(x_0 + t(x - x_0)) - A(x_0) \ ) \cdot (x - x_0) \ dt \ \| \\
&\leq \int_0^1 \| \ A(x_0 + t(x - x_0)) - A(x_0) \ \| \cdot \| \ x - x_0 \ \| \ dt \\
&\leq \int_0^1 C \| \ t(x - x_0) \ \| \cdot \| \ x - x_0 \ \| \ dt \\
&= \int_0^1 C \| \ x - x_0 \ \|^2 \ t \ dt = \frac{C}{2} \| \ x - x_0 \ \|^2 \ .
\end{aligned}
$$

Setzt man das in obigen Ausdruck fuer den Grenzwert ein, so folgt sofort

$$
\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x_0) \cdot (x - x_0)}{\| \ x - x_0 \ \|} = 0 \ .
$$

Bemerkung: Man vergleiche die Aussage dieses Satzes und den Beweis mit dem Poincare Lemma und dessen Beweis fuer sternfoermige Gebiete.

Aufgabe 36 In dieser Loesung wird die folgende Notation verwendet: Die Grassmannalgebra zu V wird mit ΛV bezeichnet, ihre i-te Schicht mit $\Lambda^i V$ und die von A induzierte Abbildung auf der i-ten Schicht mit $\Lambda^i A$.

Wir waehlen die Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ und identifizieren damit A mit einer Matrix. Die Elemente $e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3$ bilden eine Basis von $\Lambda^2 V$. Wir druecken die lineare Abbildung $\Lambda^2 A$ durch ihre Matrix bezueglich dieser Basis aus. Dazu muessen wir verstehen, wie $\Lambda^2 A$ auf der Basis operiert (denn dadurch ist die Abbildung $\Lambda^2 A$ festgelegt). Es ist

$$
\Lambda^2 A e_i \wedge e_k = A e_i \wedge A e_k = (\sum_j a_{ji} e_j) \wedge (\sum_l a_{lk} e_l) = \sum_{j,l} a_{ji} \ a_{lk} \ e_j \wedge e_l.
$$

Ist in obiger Summe $j = l$, so verschwindet wegen $e_j \wedge e_j = 0$ der Term. Ferner gilt fur $j < l$

$$
a_{ji} \ a_{lk} \ e_j \wedge e_l + a_{li} \ a_{jk} \ e_l \wedge e_j = (\ a_{ji} \ a_{lk} \ - \ a_{li} \ a_{jk} \ ) \ e_j \wedge e_l.
$$

Also

$$\Lambda^2 A e_i \wedge e_k = \sum_{1\leq j<l\leq 3} (\ a_{ji}\, a_{lk}\ -\ a_{li}\, a_{jk}\ )\ e_j \wedge e_l.$$

Also ist der Koeffizient von $\Lambda^2 A e_i \wedge e_k$ bezueglich des Basiselements $e_j \wedge e_l$ gleich $a_{ji}\ a_{lk}\ -\ a_{li}\ a_{jk}$. Das ist aber gerade die Determinante der 2×2–Teilmatrix von A, welche aus den Zeilen j, l und den Spalten i, k von A besteht.