Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lösungshinweise Blatt 8

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 27 Skizze Zur Erinnerung: Es ist

$$\alpha_i : \mathbb{R}^n \to X_i,\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left[\frac{(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_n)}{\sqrt{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \right].$$

Für $[y] \in X_i$ setzen wir

$$\beta_i([y]) = \frac{1}{y_i}(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{n+1}).$$

Man rechnet leicht nach, dass $\beta_i = \alpha_i^{-1}$.

Wir zeigen noch, dass die β_i einen differenzierbaren Atlas des projektiven Raumes bilden. Sei X_{ij} der Durchschnitt $X_i \cap X_j$. Die Kartenwechselabbildungen sind $\beta_{ij} : \beta_i(X_{ij}) \to \beta_j(X_{ij})$. Wür müssen zeigen, dass diese Abbildungen bijektiv und stetig differenzierbar sind. Das ist klar für $i = j$. Sei nun $i \neq j$. Es ist

$$\begin{aligned} \beta_i(X_{ij}) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_{j-1} \neq 0\} \\ \beta_j(X_{ij}) &= \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_{j-1} \neq 0\} \end{aligned}$$

Die Kartenwechselabbildung β_{ij} ist per Definition die Verkettung $\beta_{ij} = \beta_j \circ \alpha_i$, also

$$\begin{aligned} y \mapsto & \left[\frac{(y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_{j-1}, \ldots, y_n)}{\sqrt{1 + y_1^2 + \ldots + y_n^2}} \right] \\ \mapsto & \frac{1}{y_{j-1}} (y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_{j-2}, y_j, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass dies eine unendlich oft differenzierbare (und bijektive) Abbildung von $\beta_i(X_{ij})$ nach $\beta_j(X_{ij})$ ist.

Aufgabe 28 Die einmal durchlaufene Einheitskreislinie kann wie folgt parametrisiert werden:

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \alpha(t) := (cos(t), sin(t)),\ t \in [0, 2\pi].$$

Die Ableitung von α ist $\dot{\alpha}(t) = (-sin(t), cos(t))$. Per Definition ist

$$\int_\alpha A = \int_{[0,2\pi]} < A(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) > dt,$$

also

$$\begin{aligned}\int_\alpha A &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{cos(t)}{cos^2(t) + sin^2(t)}(-sin(t)) + \frac{-sin(t)}{cos^2(t) + sin^2(t)} cos(t) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Das Vektorfeld ist übrigens rotationsfrei, dh $rot(A) = 0$. Trotzdem ist das geschlossene Kurvenintegral nicht Null.