Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lösungshinweise Blatt 7

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 24 Wir berechnen die Oberfläche des abgeschnitten Hyperboloids

$$H_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = 1 + x^2 + y^2,\ 0 < z < t\}$$

nach dem üblichen Standardverfahren: Wir suchen zuerst eine Parametrisierung α von H_t, dann berechnen wir $g(x,y) = J(\alpha,(x,y))^T J(\alpha,(x,y))$, dann werten wir das Integral

$$\int_V \sqrt{det(g(x,y))} dxdy$$

aus.

Zunächst sei OBdA $t > 1$, denn sonst ist die Oberfläche Null. Projeziert man H_t auf die $x-y$-Ebene, so ist das Bild die offene Kreisscheibe E_{R_t} um Null mit Radius $R_t = \sqrt{t^2 - 1}$. Man überzeugt sich leicht, dass durch

$$\alpha : E_{R_t} \to H_t, \quad \alpha(x,y) = (x, y, \sqrt{1 + x^2 + y^2})$$

eine Parametrisierung gegeben ist.

Die Jacobimatrix von α ist

$$J(\alpha)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}. \end{pmatrix}$$

Daher ist

$$\sqrt{det(g(x))} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}}.$$

Also ist die Oberfläche von H_t gegeben durch

$$O(H(t)) = \int_{E_{R_t}} \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}}.$$

An dieser Stelle wäre ich als rechenscheuer Student geneigt gewesen, aufzugeben. Oder ich hätte zu Maple bzw zum Bronstein gegriffen... Es bietet sich eine Transformation in Polarkoordinaten an:

$$O(H(t)) = \int_{r\in E_{R_t}-\{0\}} \int_{t\in(0,2\pi)} \sqrt{1+\frac{r^2}{1+r^2}}\, rdtdr = 2\pi \int_{r\in E_{R_t}-\{0\}} \sqrt{1+\frac{r^2}{1+r^2}}\, rd(r).$$

Wir formen um

$$\ldots = \pi \int_0^{R_t} \sqrt{1+\frac{r^2}{1+r^2}} d(r^2),$$

substituieren $u = r^2$ und erhalten

$$\ldots = \pi \int_0^{R_t^2} \sqrt{1+\frac{u}{1+u}} du.$$

Wenn wir $v = u + 1$ setzen, erhalten wir

$$\ldots = \pi \int_1^{t^2} \sqrt{1+\frac{v-1}{v}} dv = \pi \int_1^{t^2} \sqrt{2-\frac{1}{v}} dv.$$

Wir setzen nun $w = \sqrt{2-\frac{1}{v}}$ und erhalten

$$\ldots = 2\pi \int_1^T \frac{w^2}{(2-w^2)^2} dw$$

mit $T = \sqrt{2-\frac{1}{t^2}}$. Wir müssen nun eine Stammfunktion von $\frac{w^2}{(2-w^2)^2}$ bestimmen. Es gilt

$$\frac{w^2}{(2-w^2)^2} = \frac{2}{(2-w^2)^2} - \frac{1}{2-w^2}.$$

Also ist

$$O(H_t)) = 2\pi 2 \int_1^T \frac{1}{(2-w^2)^2} dw - \int_1^T \frac{1}{2-w^2} dw.$$

Wir nennen das erste Integral I_1 und das zweite Integral I_2. Die Stammfunktion eines Integrals des Typs

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$$

kennen wir natürlich alle auswendig; es ist

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{a} artanh(\frac{x}{a}), \quad (|x| < a).$$

Also ist

$$I_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} artanh(\frac{w}{\sqrt{2}}) \right]_1^T .$$

Das I_2-Integral kann mittels einer partiellen Integration auf I_1 zurückgeführt werden; es gilt

$$I_1 = \left[\frac{w}{2 - w^2} \right]_1^T + 2(I_1 - 2I_2),$$

also gilt

$$2I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{w}{2 - w^2} \right]_1^T .$$

Wenn wir das in unsere obige Gleichung

$$O(H_t)) = 2\pi(2I_2 - I_1)$$

einsetzen und $T = \sqrt{2 - \frac{1}{t^2}}$ benützen, so erhält man - hoffentlich -

$$O(H_t) = \pi t \sqrt{2t^2 - 1} - \pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(artanh(\sqrt{\frac{2t^2 - 1}{2t^2}}) - artanh(\sqrt{\frac{1}{2}}) \right) .$$

Asymptotisch, dh. für $t \to \infty$, ist die Oberfläche also

$$O(H_t)) \approx \pi t^2 \sqrt{2}.$$