Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lösungshinweise Blatt 6

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 18 Die prinzipielle Vorgehensweise, um die Oberflächen von eingebetteten Flächen zu berechnen, ist folgende: Man zerlege die Fläche X bis auf eine Nullmenge N in disjunkte global parametrisierbare offene Teilmengen X_n, $X = \bigcup X_i \cup N$. Die Nullmenge N ist ohne Belang, da diese bei einer Integration vernachlässigt werden kann. Jedes dieser X_i sollte nun global parametrisiert werden: $\varphi_n : U_n \to X_n$, wobei U_n eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Die gesamte Oberfläche von X erhält man nun, indem man die Oberflächen der X_i aufsummiert. Damit kann man OBdA annehmen, dass X global parametrisiert sei.

Sei nun $\alpha : V \to X$ eine globale Parametrisierung. Laut Skript S.359, 360 ist dann die Oberfläche von X gegeben durch die Formel

$$\int_V \sqrt{det(g(x))} dx_1 dx_2$$

mit der Abbildung $g(x) = J(\alpha, x)^T J(\alpha, x)$.

Im Fall der Kugel ist die Oberflächenberechnung besonders einfach, weil man die Kugel bis auf eine Nullmenge durch eine einzige Karte überdecken kann. Die Parametrisierung ist die übliche durch Polarkoordinaten:

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}^2, (x, y) \mapsto (rcos(\theta)cos(\phi), rcos(\theta)sin(\phi), rsin(\theta)).$$

Wie üblich kann man sich beim Definitionsbereich auf $V = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ beschränken. Bis auf eine Nullmenge trifft man die ganze Sphäre. Wie oben muß man nun $g(x)$ ausrechnen. Man erhält letztlich

$$g(x) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 cos^2(\theta) \end{pmatrix},$$

also $det(\sqrt{g(x)}) = r^2|cos(\theta)|$.

Damit ist die gesuchte Oberfläche

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2|cos(\theta)|d\theta d\phi = \pi r^2 \int_0^{2\pi} |cos(\theta)|d\theta = 4\pi r^2.$$

Eine andere Alternative besteht darin, die Kugel durch die Nord- und die Südhalbkugel zu überdecken. Das Komplement in S^2 besteht dann aus dem Äquator. Man kann nun leicht die Nord- bzw. Südhalbkugel durch die Kreisfläche parametrisieren und wie oben verfahren.

Aufgabe 19 Diese Aufgabe kann man durch einen einfachen Trick lösen: Man transformiert die Quadrik $S[x]$ auf eine Sphäre. Die quadratische Form $S[x]$ besitzt nach LA eine Orthogonalbasis $s_1, \ldots, s_n$. Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung, die die s_i auf die Vektoren e_i der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ schickt. Behauptung: Diese lineare Abbildung schickt $X = \{x \mid x^T Sx = C\}$ auf $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T \mathbb{1} x = 0\}$. Die letzte Menge ist nichts anderes als die Sphäre um den Punkt 0 mit Radius $\sqrt{C}$. Durch die lineare Abbildung $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{C}} x$ wird diese wiederum auf die Sphäre um 0 mit Radius 1 abgebildet. Daher ist es ausreichend, zu wissen, dass die Sphäre eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ ist. Das kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Wir müssen noch die Behauptung zeigen. Notation: $< v, w >_S = v^T Sw$; $<,>$ sei das Standardskalarprodukt. Dann gilt nach Definition der s_i: $< s_i, s_j >_S = \delta_{ij} =< T(s_i), T(s_j) >$. Da T linear ist, kann man das linear auf alle Vektoren im $\mathbb{R}^n$ fortsetzen und erhält $< x, y >_S =< Tx, Ty >$, also $S[x] =< Lx, Lx >$. Mit anderen Worten: $S[x] = C \Leftrightarrow < Lx, Lx >= C$. Es ist aber $< Lx, Lx >= (Lx)^T \mathbb{1}(Lx) = ||Lx||^2$, dh. $x \in X \Leftrightarrow L(x) \in S^{n-1}_{\sqrt{C}}$, wobei letzteres die Sphäre mit Radius $\sqrt{C}$ bezeichnet.

Aufgabe 20 (a) Der Tangentialraum ist $T_a X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T Sx = 0\}$.

Aufgabe 21b, 2. Teil Diese Aufgabe war mit den bisherigen Mitteln nur schwer zugänglich. Wir werten sie daher wie eine Zusatzaufgabe.