Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lösungshinweise Blatt 5

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 15 (Skizze) Beachte zunächst, dass $x \mapsto \frac{df}{dt}(t,x)$ meßbar ist, da die Ableitung ein punktweiser Limes meßbarer Funktionen ist.

Es sei nun wie in der Aufgabenstellung

$$F(t) := \int_X f(t,x)dx.$$

Dann gilt

$$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} = \int_X \frac{f(t,x)-f(t_0,x)}{t-t_0}dx = \int \int_0^1 \frac{df}{dt}(t_0+s(t-t_0),x)dsdx.$$

Man überlegt sich nun, dass für jedes feste x und für jede Folge $t_n \to t_0$ aufgrund des Satzes von Lebesgue (und den Voraussetzungen an f) folgendes gilt:

$$\lim_n \int_0^1 \frac{df}{dt}(t_0+s(t_n-t_0),x)ds = \int_0^1 \frac{df}{dt}(t_0,x)ds = \frac{df}{dt}(t_0,x).$$

Nun muß man den Satz von Lebesgue noch einmal anwenden und erhält

$$F'(t_0) = \int \lim_n \int_0^1 \frac{df}{dt}(t_0+s(t_n-t_0),x)dsdx = \int \frac{df}{dt}dx.$$

Aufgabe 17(Skizze) (a) $x \to f(x)e^{-2\pi i x\xi}$ ist meßbar und es gilt $|f(x)e^{-2\pi i x\xi}| = |f(x)|$. Da mit f auch $|f|$ integrierbar ist, folgt die Behauptung.

(b) Vielleicht später

(c) Man muß ja nur $\int_{-1}^{1} e^{-2\pi ixt}dt$ berechnen. Das Ergebnis ist

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{e^{-2\pi ix}}{-2\pi ix} & x \neq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht integrierbar.

(d) Wir skizzieren die Idee im eindimensionalen Fall. Wenn man die Fouriertransformierte partiell integriert, so fallen die Randterme weg. Man erhält

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(y)\frac{e^{-2\pi iyx}}{2\pi ix}dy.$$

Indem man x auf die andere Seite schafft, sieht man, dass $xf(x)$ beschränkt ist. Diese Argumentation kann man nun iterieren und sieht, dass $x^n f(x)$ für alle n beschränkt ist. Um zu sehen, dass auch alle partiellen Ableitungen temperiert sind, kann man die Aufgabe 15 benutzen und wild rumrechnen usw. usf...