Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lösungshinweise Blatt 4

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 11 (a) Betrachte für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen

$$f_n(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2 + \frac{1}{n})^2}.$$

Für jedes n ist die Funktion f_n stetig auf $\mathbb{R}^2$ und somit meßbar. Es gilt offensichtlich $\lim_n f_n(x, y) = f(x, y)$, also ist auch f meßbar.

(b) Für alle $y \in (-1, 1) - \{0\}$ ist die Funktion $x \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ stetig auf $(-1, 1)$, also integrierbar. Es gilt $\int_{-1}^{1} f(x, y)dx = 0$, da die Funktion ungerade ist. Aus Symmetriegründen folgt $J = 0$.

(c) Wir berechnen mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int\int_{(0,1)^2} |f(x, y)| dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{2} \left(\int_0^1 \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{2} \left(\left[-\frac{1}{x^2 + y^2} \right]_{x=0}^{x=1} \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 y \left(\frac{-1}{1 + y^2} + \frac{1}{y^2} \right) dy \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Da $\int\int_{(-1,1)^2} |f(x,y)|dxdy \;\; \geq \;\; \int\int_{(0,1)^2} |f(x,y)|dxdy$ ist f nicht integrierbar über $(-1,1)^2$. Also kann man denn Satz von Fubini nicht anwenden (auch wenn $I = J$ gilt).

Aufgabe 12 Jedes der C_n ist meßbar. Damit ist der Durchschnitt C meßbar. Es gilt $C_{n+1} \subseteq C_n$, also gilt $\mu(C) = \lim_n \mu(C_n)$. Es ist $\mu(C_0) = 1$ und $\mu(C_{n+1}) = \frac{2}{3}\mu(C_n)$, also $\mu(C) = \lim_n (\frac{2}{3})^n = 0$.

Die Menge C ist die sogenannte Cantor-Menge. Sie überabzählbar, eine Nullmenge, kompakt, total unzusammenhängend, nirgends dicht (dh. enthält keine inneren Punkte) und, und, und... Die Punkte in C sind genau die reellen Zahlen zwischen 0 und 1, in deren 3-adischer Entwicklung die 1 nicht als Koeffizient auftritt. Für weitere Informationen siehe etwa Wikipedia. oder die folgende detaillierte Ausarbeitung.

Aufgabe 13 (a) Es liegt nahe, x und y über Polarkoordinaten auszudrücken: $x = r \cdot cos(\alpha),\ y = r \cdot sin(\alpha)$, wobei wie üblich $r \in (0,\infty)$ und $\alpha \in (0, 2\pi)$. Bezeichnet man die Polarkoordinatenabbildung mit $\tilde{\phi}$, so gilt

$$F(\tilde{\phi}(r,\alpha)) = f(r^2 cos(\alpha)^2 + r^2 sin(\alpha)^2) = f(r^2).$$

Wegen des unliebsamen r^2 im Argument empfiehlt sich daher eher die Substitution $\phi : U = (0,\infty)\times(0,2\pi) \to X = \mathbb{R}^2 - N$, $(r,\alpha) \mapsto (\sqrt{r} cos(\alpha), \sqrt{r}\sin(\alpha))$. Hierbei ist N die Nullmenge $N = \{(x,0) \mid x \geq 0\}$. Es gilt dann $F(\phi(r,\alpha)) = f(r)$, also "naiv" $F = f \circ \phi^{-1}$.

Das ergibt formal keinen Sinn, da f auf ein Element aus U angewendet wird. Führe daher die Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$, $(r,\alpha) \to f(r)$ ein. Damit gilt dann $F = \tilde{f} \circ \phi^{-1}$ Offensichtlich ist mit f auch $\tilde{f}$ integrierbar. Wir wenden jetzt die Transformationsformel an:

$$\int_X F(x,y)dxdy = \int_U \tilde{f}(r,\alpha)|det(J(\phi^{-1}))|drd\alpha.$$

Es ist $|det J(\phi^{-1})| = \frac{1}{2}$, also

$$\int_X F(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\int_U \tilde{f}(r,\alpha)drd\alpha = \pi \int_0^\infty f(r)dr.$$

Da N eine Nullmenge ist, folgt die Behauptung.

(b) Es gilt $\int_0^\infty e^{-r} dr = 1$. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} F(x,y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-x^2} dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy.\end{aligned}$$

Mit Aufgabenteil (a) folgt

$$(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2 = \pi,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$