Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lösungshinweise Blatt 3

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 7 Wäre f Lebesgue-integrierbar, so auch $|f|$. Aus der Ana 1 wissen wir schon, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty |\frac{sin(x)}{x}|dx$ nicht existiert. f ist also nicht Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 8 (a) Siehe das Kriterium 1.16 für Regelfunktionen im Analysis 1 Skript auf Seite 125.

(b) klar; das Integral ist $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$.

(c) Sei $x \in [0,1]$. Falls x irrational ist, so ist $f_n(x) = 0$ für alle n und somit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Ist x rational, so existiert ein Index p mit $x = q_p$. Für $n \geq p$ gilt dann $f_n(x) = 1$, also $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Man sieht, dass der Satz von Lebesgue für Regelfunktionen nicht gilt.

(d) Die f_n konvergieren punktweise gegen die Funktion f, sind integrierbar und es gilt $|f_n| \leq \chi_{[0,1]}$. Die Funktion $\chi_{[0,1]}$ ist offensichtlich integrierbar. Damit sind die Bedingungen des Satzes von Lebesgue erfüllt und es gilt

$$\int_{[0,1]} f dx = \lim_n \int_{[0,1]} f_n dx = \lim_n \int_0^1 f_n dx = 0.$$

Aufgabe 10 (Skizze) Die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{x^x}$ ist stetig auf $(0, \infty)$ und mit $f(0) := 1$ stetig fortsetzbar in 0. Damit ist die Funkiton integrierbar auf $[0,1]$. Für $x > 0$ ist

$$\frac{1}{x^x} = e^{-x\ ln(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\ ln(x))^n}{n!}.$$

Man überlegt sich dann, dass man hier den Grenzwert mit dem Integral vertauschen kann (Satz von Lebesgue); also

$$\int_{(0,1]} \frac{1}{x^x} dx = \sum_n \int_{(0,1]} \frac{(-x\ ln(x))^n}{n!} dx.$$

Für alle $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ setze $I_{m,n} = \int_0^1 x^n ln(x)^m dx$. Eine partielle Integration liefert $I_{m,n} = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n}$, also rekursiv

$$I_{m,n} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^m} I_{0,n} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

Also gilt

$$\int_0^1 \frac{(-x\ ln(x))^n}{n!} dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Einsetzen liefert die gewünschte Behauptung.