Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lösungshinweise Blatt 2

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 5 (a) Sei $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein N gibt, so dass für alle $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $N \leq m \leq n$ $||f_m - f_n|| \leq \epsilon$ gilt. Sei $m < n$.

$$\begin{aligned} ||f_m - f_n|| &= \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n-m) dt + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}} (\frac{1}{\sqrt{t}} - m) dt \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$, existiert ein N mit $\frac{1}{m} < \epsilon$.

(b) Angenommen, es gäbe eine stetige Funktion f mit $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$. Falls f identisch Null ist, so müßte $\lim_{n\to\infty} ||f_n||_1 = 0$ gelten. Da aber $||f_n||_1 = 2 - \frac{1}{n}$, ist das nicht möglich. Sei nun $f \neq 0$. Man rechnet aus:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{M^2}} |f_n(t) - f(t)| dt &\geq \int_0^{\frac{1}{M^2}} |\, |f_n(t)| - |f(t)| \,| dt \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{M^2}} (f_n(t) - M) dt. \end{aligned}$$

Das letzte Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{M^2}} (f_n(t) - M)dt &= \int_0^{\frac{1}{M^2}} f_n(t)dt - \int_0^{\frac{1}{M^2}} M dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{n^2}} f_n(t)dt - \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{M^2}} f_n(t)dt - \frac{1}{M} \\
&= \int_0^{\frac{1}{n^2}} ndt + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{M^2}} \frac{1}{\sqrt{t}}dt - \frac{1}{M} \\
&= \frac{1}{M} - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Indem man n gegen ∞ laufen läßt, erhält man $0 \geq \frac{1}{M}$, was unmöglich ist.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 |f_n(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}|dt$ und es gilt

$$\int_0^1 |f_n(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}|dt = \int_0^{\frac{1}{n^2}} (\frac{1}{\sqrt{t}} - n)dt = \frac{1}{n},$$

also

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - \frac{1}{\sqrt{t}}||_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Nun müßte man noch zeigen, dass die Funktion auf $[0, 1]$ Lebesgue-integrierbar ist (sie ist nicht Regel- oder Riemann-integrierbar, da sie nicht beschränkt ist). Das wird aus Faulheit unterlassen.

Bemerkung: Tatsächlich konvergiert die Folge der Funktionen f_n auch nicht gegen eine Regelfunktion (im Beweis von b) wird nichts als die Beschränktheit benutzt). Der Raum der Regelfunktionen ist nicht vollständig bzgl der *Seminorm* $||.||_1$ ($||.||_1$ ist keine Norm mehr auf dem Raum der Regelfunktionen, da die Bedingung “$||f|| > 0$ für alle $f \neq 0$” verletzt ist).