Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis III SS 2009

Lösungshinweise Blatt 1

Die folgenden Hinweise sollten auf keinen Fall als Musterlösungen verstanden werden!

Aufgabe 2 Hier eine *geplauderte* Lösung. Die naive Idee ist es, eine unendlich differenzierbare Funktion zu nehmen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und mindestens zwei Nullstellen hat. Man schneidet dann die Funktion links und rechts der beiden Nullstellen ab und setzt sie dort konstant Null. Diese Funktion hat zwar kompakten Träger, ist aber nicht unendlich differenzierbar. Beispiel: Wir schneiden $cos(x)$ bei $\frac{-\pi}{2}$ bzw $\frac{\pi}{2}$ ab.

Offensichtlich kann die Ableitung bei den Abschneidestellen (falls sie überhaupt existiert) aber nicht stetig sein. Auf der einen Seite ist die Ableitung Null, auf der anderen Seite $sin(x)$ (und $sin(\frac{-\pi}{2}) = -1$, $sin(\frac{\pi}{2}) = 1$...). Dieses Problem tritt natürlich nicht nur bei $cos(x)$ auf. Wir suchen ja eine Funktion, die irgendwann konstant Null ist, deren Ableitung dort also auch konstant Null ist. Die Startfunktion muß also an der Nullstelle x_0, an der man abschneidet, die Eigenschaft $f^{(n)}(x_0) = 0 \ \forall n$ besitzen (ohne selbst Null zu sein...).

Die Funktion $f = exp(-1/x^2)$ hat netterweise diese Eigenschaft im Nullpunkt. Sei nun f die Funktion $exp(-1/x^2)$. Die Funktion $f(1-x)$ ist im 1 nach rechts verschoben, die Funktion $f(1+x)$ ist um 1 nach links verschoben. Die zusammengesetzte Funktion $\phi := f(1-x)f(1+x)$ ist dann symmetrisch zum Ursprung.

Schneidet man die Funktion bei den Punkten $x = -1$ (links) bzw $x = 1$ (rechts) ab und setzt

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) \text{ für} |x| < 1 \\ 0 \text{ für } |x| \geq 1 \end{cases} ,$$

so erhält man eine Funktion mit kompaktem Träger.$[-1, 1]$. Man überprüft nun leicht, dass die Funktion unendlich oft differenzierbar ist. Für Bilder der Funktionsgraphen siehe hier.

Bemerkung: Beachte: Offensichtlich gibt es keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte analytische Funktion mit kompaktem Träger außer der Nullfunktion.

Aufgabe 4 Hier nur eine grobe Skizze. Die Vektorraumstruktur ist klar. Zu (b): Wir definieren die Funktion $I : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ durch

$$I(f - g) = I(f) - I(g).$$

Man überprüft sofort, dass dies wohldefiniert ist: Falls $f_1 - g_1 = f_2 - g_2$, so folgt $I(f_1 - g_1) = I(f_2 - g_2)$.

Falls $f \in B_b^+(X)$ so stimmt $I(f)$ mit dem gewöhnlichen Integral überein (betrachte $f = f - 0$). Die Linearität der Funktion rechnet man einfach (aber länglich) nach.