Übungsgruppe 01.12.2009

Aufgabe 17

(a) Da $x \mapsto e^{-2\pi ixy}$ stetig, $f \in \mathrm{L}^1$, also f messbar ist auch das Produkt $x \mapsto f(x)e^{-2\pi ixy}$ messbar. Und mit $|e^{-2\pi ixy}f(x)| = |f(x)|$ ist der Betrag integrierbar, also ist die Funktion $x \mapsto f(x)e^{-2\pi ixy}$ in L^1. Damit ist

$$\mathcal{F}(f)(x) := \hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{2\pi ixy}dy,$$

die Fouriertransformierte von f wohldefiniert.

(b) Zunächst zeigen wir folgende Hilfsbehauptung:
Beh: $g : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{1}{(x_1^2+1)\cdots(x_n^2+1)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Jedenfalls ist g auf dem Kompaktum $[-k,k]^n$ stetig und beschränkt und daher dort in L^1, Lebesgue- und Regelintegral stimmen überein. D.h. man kann das iterierte Regelintegral ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{[-k,k]^n} \frac{1}{(x_1^2+1)\cdots(x_n^2+1)} &= \int \cdots \int_{[-k,k]} \frac{1}{(x_1^2+1)\cdots(x_n^2+1)} dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{[-k,k]} \frac{1}{x_1^2+1} dx_1 \cdots \int_{[-k,k]} \frac{1}{x_n^2+1} dx_n \\
&= \prod_{i=1}^n \int_{-k}^k \frac{1}{x_i^2+1} dx_i \\
&= \prod_{i=1}^n 2\arctan(k) \\
&= 2^n \arctan(k)^n \leq \pi^n
\end{aligned}$$

Damit lässt sich g also monoton aproximieren durch $g_k := \chi_{[-k,k]^n} g$, wobei die Folge der Integrale durch π^n beschränkt bleibt. Damit ist nach Beppo-Levi $\lim_{k\to\infty} g_k = g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stark abklingend, d.h. $f(x)P(x)$ ist für jedes Polynom $P(x) = P(x_1, \ldots, x_n)$ beschränkt. Dann gibt es insbesondere mit $P(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2+1)\cdots(x_n^2+1)$ ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $|f(x)P(x)| \leq c \Leftrightarrow |f(x)| \leq c|g(x)|$. Nach obiger Behauptung ist $cg \in \mathrm{L}^1$, f messbar nach Voraussetzung, also ist $f \in \mathrm{L}^1$.

(c) Die Funktion $f = \chi_{[-1,1]}$ ist bekanntlich in L^1 und trivialerweise stark abklingend. Für ihre Fouriertransfomierte gilt:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} & x \neq 0 \end{cases}$$

ist nach früherer Aufgabe nicht integrierbar (evt nach Transformation $x \mapsto 2\pi x$).

(d) Ab sofort gilt $n = 1$, wie in der Aufgabe erlaubt. Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi ixy}dy \\
&= \left[-f(y)\frac{e^{-2\pi ixy}}{2\pi ix}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(y)\frac{e^{-2\pi ixy}}{2\pi ix}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f'(y)\frac{e^{-2\pi ixy}}{2\pi ix}dy,
\end{aligned}$$

da f stark abklingend (und damit $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$) und $e^{-2\pi ixy}$ beschränkt für $x, y \in \mathbb{R}$. Da x im Integral ein konstanter Faktor ist, kann man ihn herausziehen. Da f' nach Voraussetzung stetig und stark abklingend, ist $|f'| \in \mathrm{L}^1$ und man erhält

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(x)x| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(y)\frac{e^{-2\pi xy}}{2\pi i}| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(y)|dy = C.
\end{aligned}$$

Nach dem selben, iteriert angewendeten Argument gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein C_n so dass

$$|\hat{f}(x)x^n| \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(y)dy| = C_n.$$

Für ein Polynom $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ ist also aus Linearitätsgründen

$$|\hat{f}(x)P(x)| \leq \sum \alpha_i C_i,$$

mithin beschränkt. Damit ist $\hat{f}(x)$ stark abklingend. Nun soll die Differenzierbarkeit von $\hat{f}$ gezeigt werden. Offenbar ist $y \mapsto f(y)e^{-2\pi ixy}$ integrierbar, wie bereits gezeigt. Darüber hinaus ist die Funktion nach x ableitbar: Da $f(y)2\pi iy$ temperiert ist (klar: f temperiert $\Rightarrow$ $f^{(n)}(y)$ und $f^{(n)}(y)y$ stark abklingend für alle n , also $(f(y)y)^{(n)} = f^{(n)}(y)y + nf^{(n-1)}(y)$ stark abklingend, damit sind alle Ableitungen von $f(y)2\pi iy$ stark abklingend), ist es integrierbar und man erhält:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(y)e^{-2\pi ixy} = -f(y)2\pi iy\, e^{-2\pi ixy}$$

ist integrierbar und alle Voraussetzungen für Vertauschen von Integral und Ableitung sind erfüllt. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(y)e^{-2\pi ixy}dy = -\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi iy)f(y)e^{-2\pi ixy}dy = \mathcal{F}(\tilde{f})(x)$$

mit $\tilde{f} : y \mapsto -2\pi iyf(y)$. Insbesondere erfüllt $\tilde{f}$ wieder die selben Voraussetzungen wie f, d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{f}(x) = \mathcal{F}(\tilde{f})$ ist stark abklingend und differenzierbar, woraus die Behauptung bereits folgt, d.h. $\hat{f}$ ist temperiert.