Probeklausur

Ja-Nein-Fragen

(1) $\mathbb{R}$ sei mit dem üblichen Maß versehen. Jede abzählbare Teilmenge ist eine Nullmenge. Richtig

(2) $\mathbb{R}$ sei mit dem üblichen Maß versehen. Jede Nullmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist abzählbar. Falsch, z.B. Cantormenge

(3) Ist die Formel $\frac{d}{dt}\int_0^1 e^{-x^2 t}dt = -\int_0^1 x^2 e^{-x^2 t}dt$ richtig? Nein, die linke Seite enhält nach dem Integrieren überhaupt kein t mehr, ist also 0. Handelte es sich um Integrale nach dx, so wäre die Formel richtig, da es sich um stetige Funktionen auf Kompakta handelt, also beschränkt.

(4) Ist der Rand einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ (versehen mit dem Standardmaß) immer eine Nullmenge?

Nein, Gegenbeispiel: Sei q_n eine Abzählung der rationalen Zahlen. Definiere $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n})$. Dies ist als Vereinigung offener Mengen offen. Da die Menge in $\mathbb{R}$ dicht liegt, gilt $\overline{U} = \mathbb{R}$. Das Maß von U kann nicht größer als die Summe der Maße der einzelnen Intervalle sein: $\mu(U) \leq \sum \frac{1}{2^{n-1}} = 4$. Damit muss aber wegen $U \cup \partial U = \mathbb{R}$ der Rand von U unendliches Maß haben.

(5) Jede beschränkte stetige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ auf einem beschränkten offenen Teil $U \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-integrierbar.

Richtig (Zettel 2, Aufgabe 6). Wäre die Menge nicht beschränkt, wäre die Aussage falsch.

(6) Sei X eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann existiert eine überall positive Volumenform.

Richtig. Siehe z.B. Skript 5.13.

(7) Sei X eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ist jede Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ wieder orientierbar?

Nein, z.B. ist das Möbiusband als 2-dim nichtorientierbare Mannigfaltigkeit als Untermannigfaltigkeit in den orientierbaren $\mathbb{R}^3$ einbettbar.

(8) Sei X eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit, $U \subset X$ eine offene Teilmenge mit glattem Rand. Ist dann der Rand von U stets eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit?

Ja. Sonst wäre z.B. der Satz von Stokes gar nicht sinnvoll, da man dann auf dem Rand u.U. nicht integrieren könnte.

Aufgaben

Aufgabe 5 Sei $\alpha : D \to X \subset \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R}^d$ offen) eine reguläre Parametrisierung einer eingebetteten Mannigfaltigkeit. Wie kann man das d-dimensionale Volumen berechnen?

$$\int \sqrt{\det(J(\alpha; x)^\top J(\alpha; x))} dx$$

.

Aufgabe 6 Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein stetiges Vektorfeld und $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Wie ist $\int_\alpha A$ definiert?

$$\int_\alpha A = \int_0^1 < A(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) > dt$$

Aufgabe 10 Man gebe eine 1-Form ω auf $\mathbb{R}^n$ an, so dass gilt: $d\omega = x_2 dx_1 \wedge dx_2$.

$$\omega = x_1 x_2 dx_2$$

Aufgabe 12 Man berechne $\varphi^*\omega$ für $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \varphi(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_1^2, x_2^2)$ und $\omega = y_1^2 dy_2 \wedge dy_3$.

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega &= \varphi_1^2 d\varphi_2 \wedge \varphi_3 \\ &= x_1^2 x_2^2 (2x_1 dx_1) \wedge (2x_2 dx_2) \\ &= 4x_1^3 x_2^3 dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Aufgabe 15 Sei ω eine überall positive Differentialform vom Grad n einer n-dimensionalen kompakten orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Man zeige, dass sich ω nicht in der Form $d\omega'$ schreiben lässt.

Lösungsskizze: Gäbe es solch ein ω' so wäre nach dem Satz von Stokes

$$0 \neq \int_X \omega = \int_X d\omega' = \int_{\partial X} \omega' = \int_\emptyset \omega' = 0$$

Aufgabe 16 Man will ein Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ längs einer zweidimensijonalen Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^3$ integrieren. Wie sollte man zu A eine Differentialform ω zuordnen, so dass das Integral $\int_X \omega|_X$ dieses Integral realisiert?

Die gesuchte Form ist $\omega = A_1 dx_2 \wedge dx_3 + A_2 dx_3 \wedge dx_1 + A_3 dx_1 \wedge dx_2$ (Bemerke dass hier offenbar wieder der Hodge-Stern-Operator mitmischt). Dies ist die richtige Differentialform, denn mit einer Parametrisierung $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to X$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\int_X \omega &= \int_U \varphi^* \omega \\
&= \int_U A_1(\varphi(x_1,x_2)) d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 + A_2(\varphi(x_1,x_2)) d\varphi_3 \wedge d\varphi_1 + A_3(\varphi(x_1,x_2)) d\varphi_1 \wedge d\varphi_1 \\
&= \int_U A_1(\varphi(x_1,x_2)) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} dx_2 \right) \\
&\quad + A_2(\varphi(x_1,x_2)) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \\
&\quad + A_3(\varphi(x_1,x_2)) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \\
&= \int_U A_1(\varphi(x_1,x_2)) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + A_2(\varphi(x_1,x_2)) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&\quad + A_3(\varphi(x_1,x_2)) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \int_U \Bigg(A_1(\varphi(x_1,x_2)) \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \right) \\
&\quad + A_2(\varphi(x_1,x_2)) \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \right) \\
&\quad + A_3(\varphi(x_1,x_2)) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \right) \Bigg) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \int_U \ldots dx_1 dx_2 \\
&= \int_U < A(\varphi(x_1,x_2)), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} > dx_1 dx_2 \\
&= \int_U A dF
\end{aligned}
$$