Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. E. Freitag /Thorsten Heidersdorf

Übungen zur Analysis I WS 2008/2009

Blatt 9, Abgabe bis zum 12.12.2008 um 11:00 Uhr

Aufgabe 33 (a) Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n, \quad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}x^n.$$

(b) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ habe den Konvergenzradius $R > 0$. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$.

(3 + 2 = 5 Punkte)

Aufgabe 34 (a) Man zeige: Für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gibt es ein $r \geq 0$ und ein $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass $z = re^{i\varphi}$. Sind r und φ durch z eindeutig bestimmt?

(b) Bestimme die Darstellung von $z = 2i$ in der Form $re^{i\varphi}$. Was bedeutet die Multiplikation einer komplexen Zahl mit $2i$ geometrisch?

(3 + 1 = 4 Punkte)

Aufgabe 35 Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine feste reelle Zahl. Man bestimme i) diejenigen $c \in \mathbb{R}$, so dass die Folge $(\cos(nc))_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist bzw. ii) diejenigen $c \in \mathbb{R}$, so dass die Folge $(\sin(nc))_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 36 (a) Seien a, $b \in \mathbb{R}$. Zeige: Es gibt A, $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x) = A \cdot sin(x + \varphi).$$

(b) Man zeige (mittels der Additionstheoreme)

$$(i)\ sin(arccos(x)) = cos(arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2};$$

$$(ii)\ sin(arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$(iii)\ tan(arccos(x)) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

und bestimme jeweils den Gültigkeitsbereich dieser Formeln.

(2 + 2 = 4 Punkte)